Ciências Humanas

selo Teses & Dissertações

Fabio Luiz de Oliveira

A PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO ACERCA DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS EM UM COLETIVO DE SERES-HUMANOS-COM-MÍDIAS

editoraUFOP

A PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO ACERCA DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS EM UM COLETIVO DE SERES-HUMANOS-COM-MÍDIAS

Universidade Federal
de Ouro Preto

Reitora
Cláudia Aparecida Marliére de Lima
Vice-Reitor
Hermínio Arias Nalini Jr.

editoraUFOP

Diretor
Prof. Frederico de Mello Brandão Tavares
Coordenação Editorial
Daniel Ribeiro Pires
Assessor da Editora
Alvimar Ambrósio

Fabio Luiz de Oliveira

A PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO ACERCA DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS EM UM COLETIVO DE SERES-HUMANOS-COM-MÍDIAS

Ouro Preto
2017

editoraUFOP

Coordenação Editorial
Daniel Ribeiro Pires

Capa
Daniel Ribeiro Pires

Diagramação
Pollyanna Assis

Revisão
Rosângela Zanetti
Thiago Vieira

Ficha Catalográfica
(Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br)

O482p Oliveira, Fábio Luiz de.
A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis em um coletivo de seres-humanos-com-mídias / Fábio Luiz de Oliveira. – Ouro Preto : Editora UFOP, 2017.
194 p. : il. : color; grafs; tabs.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Cálculo – Estudo e ensino. 3. Tecnologia da informação. 4. Mídia digital. 5. Software – Matemática I. Titulo. II. Universidade Federal de Ouro Preto.

CDU: 378:510

ISBN 978-85-288-0358-7

EDITORA UFOP
Campus Morro do Cruzeiro
Centro de Comunicação, 2º andar
Ouro Preto / MG, 35400-000
www.editora.ufop.br / editora@ufop.br
(31) 3559-1463

Esta obra foi selecionada pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, a partir do Edital nº 002/2014 da Editora UFOP, para editoração eletrônica de trabalhos originados de teses e dissertações.

SUMÁRIO

LISTAS DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

PREFÁCIO

Senti-me muito honrada com o convite para fazer o prefácio da publicação de Fabio Luiz de Oliveira. É com satisfação que apresento este livro relatando a pesquisa desenvolvida pelo autor e que aborda o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, com foco nas funções de duas variáveis. Como orientadora, acompanhei todo o seu desenvolvimento e pude testemunhar a dedicação e o empenho do autor para encontrar alternativas para o ensino desse tema. Aprendi com meu grande mestre Ubiratan D'Ambrosio que é preciso haver certa identidade de ideias entre orientando e orientador. Vivenciamos isso no período da orientação. Tínhamos as mesmas preocupações, já havíamos enfrentado dificuldades semelhantes em sala de aula e estávamos convictos de que os ambientes informatizados poderiam trazer alternativas interessantes para enfrentamento dessas dificuldades. E, assim, iniciamos a trajetória que culmina com esta publicação. A experiência de Fabio Luiz de Oliveira como professor, sua habilidade em aproveitar ao máximo os recursos de cada mídia e o respaldo de referencial teórico consistente possibilitaram a elaboração de sequências de atividades relativas ao tema, que ele desenvolveu com seus alunos. Com os critérios que a pesquisa exige, as atividades foram analisadas e são apresentadas neste livro que recomendo ao leitor por estar convicta da relevância do tema abordado e dos bons resultados obtidos.

As dificuldades que os estudantes encontram com o Cálculo Diferencial e Integral são frequentemente constatadas pelos professores da disciplina. Nas últimas décadas, o tema tem sido abordado em quantidade significativa das pesquisas em Educação Matemática, considerando aspectos variados, tais como altos índices de reprovação, dificuldades de aprendizagem dos conceitos, propostas metodológicas e recursos didáticos para o ensino. No entanto, em grande parte delas, o foco é o cálculo de uma variável. O cálculo de várias variáveis aparece em um número bem menor de pesquisas, e daí a importância deste livro com a publicação de uma delas.

O foco principal do autor é olhar para o conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis que pode ser produzido pelos estudantes em um coletivo de Seres-Humanos-com-Mídias. Para tanto se utiliza do constructo teórico apresentado por Borba e Villarreal, segundo o qual o pensamento é reorganizado e produzido por um coletivo pensante com atores humanos e não humanos.

Para o autor, o desenvolvimento de atividades em ambientes utilizando diferentes mídias (tais como a informática, a oralidade e a escrita), estimulando a exploração dos conceitos, a interação e o diálogo, pode favorecer o aparecimento de ideias matemáticas que são fundamentos para a formalização e a abordagem teórica de conceitos de cálculo, inclusive os relativos às funções de duas variáveis. O livro apresenta grupos de atividades (sobre gráfico, domínio, curvas de nível, derivadas parciais e extremos de funções de duas variáveis), todas com a seguinte característica: primeiro os estudantes exploram situações com o uso das diferentes mídias e dialogam no coletivo; em seguida, os conceitos são introduzidos tendo como referências às ideias matemáticas produzidas na exploração; posteriormente, os conceitos são formalizados. Neste livro, o desenvolvimento das atividades é apresentado em detalhes, discutido e analisado. As ideias matemáticas produzidas são enfatizadas, assim como a sua posterior utilização para a formalização dos conceitos. Dessa forma, esta obra dá subsídios ao professor que queira experimentar uma alternativa para a aula expositiva tradicional, alternativa esta fundamentada na produção de conhecimento em coletivos de seres-humanos-com-mídias.

A visualização é um aspecto bastante valorizado pelo autor. Nesse sentido, a mídia informática tem destaque. As imagens de superfícies tridimensionais obtidas por meio de softwares são frequentemente encontradas nos livros de Cálculo, no entanto é significativamente diferente olhar uma imagem pronta ou produzi-la com a possibilidade de mudar expressões, variar parâmetros e elaborar conjecturas a partir do observado. O autor apresenta muitas ideias matemáticas que se fizeram presentes nos registros escritos e nas manifestações orais dos estudantes e que foram produzidas com base na utilização dos recursos do software MAXIMA. Um ponto positivo a ser destacado é a escolha de um software do tipo CAS (Computer Algebra System) gratuito e, portanto, com reais possibilidades de utilização em contextos escolares. Esse tipo de software possibilita trabalhar diferentes representações: gráficas, numéricas e algébricas. As propostas de atividades estimularam a utilização dessas diferentes representações como possibilidades de exploração e produção das ideias matemáticas.

Outro aspecto abordado é a transição interna do cálculo de uma para duas variáveis. Essa transição tem sido apontada na literatura como uma dificuldade a mais para os estudantes, além das inerentes ao pensamento matemático avançado que o Cálculo requer. São representações simbólicas, geométricas e definições mais complexas e regras operatórias particulares. No caso da pesquisa apresentada, essa transição parece ter ocorrido de forma natural e espontânea. Como as atividades desenvolvidas estimularam a exploração antes da apresentação dos conceitos, os estudantes buscaram referências anteriores não só para refletir sobre o que estavam observando na exploração por meio do software, como também para interpretar e elaborar conjecturas. Dessa forma, a relação com os conceitos análogos estudados anteriormente para funções de uma variável naturalmente aconteceu, tendo o professor buscado os momentos adequados para retomar os conceitos necessários, confirmar ou refutar as conjecturas e fazer as analogias possíveis.

Também é abordado no livro o papel das mídias na produção dos conhecimentos. Ao propor a utilização de determinada mídia, é importante refletir em que essa mídia pode contribuir, pois não há apenas uma considerada ideal. O leitor encontrará aqui a descrição comentada de situações de utilização da oralidade, da escrita e da informática, com uso de representações gráficas, algébricas e numéricas para a exploração dos conceitos relativos a funções de duas variáveis. A escolha de uma ou outra mídia foi feita em alguns casos como proposta do professor e, em outros, por opção dos estudantes. Considerando que as diferentes mídias possibilitam a reorganização do pensamento, condicionando a forma como produzimos conhecimento, o autor discute a influência delas para a produção das ideias matemáticas pelos estudantes e destaca não só as possibilidades de construir e manipular imagens de acordo com aquilo que se pretende avaliar, como também as de experimentar muitas variações de parâmetros e intervalos e de recorrer a recursos algébricos (com ou sem o uso dos computadores) como coadjuvantes na exploração, especialmente em situações em que apenas a imagem gráfica não permite concluir. E avalia também como o conhecimento foi produzido de forma singular na presença de determinada mídia.

Em suma, o livro é um convite à reflexão sobre o enfrentamento de dificuldades com o ensino e a aprendizagem do cálculo de várias variáveis e também um convite à reflexão sobre as possibilidades para a produção de conhecimento matemático acerca das funções de duas variáveis, decorrentes da constituição de ambientes com a presença de diferentes mídias constituindo coletivos pensantes.

Regina Helena de Oliveira Lino Franchi

APRESENTAÇÃO

O meu interesse pela Matemática aprofundou-se durante o ensino médio. Ao término do curso, prestei vestibular para alguns cursos na área de ciências exatas, incluindo a Licenciatura em Matemática. Na mesma época comecei a lecionar as disciplinas de Matemática e Física em uma escola da rede estadual de Minas Gerais. Motivado pela necessidade da formação profissional nas disciplinas mencionadas, optei pelo curso de Licenciatura em Ciências. Então, em 1994, iniciei a Licenciatura em Ciências paralelamente com a docência nos ensinos fundamental e médio. Posteriormente, em 1997, comecei a cursar a Licenciatura em Matemática pela mesma Instituição. Nesse período, com a experiência e conhecimentos adquiridos, procurei novos desafios, iniciando atividades em cursos técnicos e também na Educação de Jovens e Adultos. Nesta última, fiquei por quase seis anos e tive a oportunidade de trabalhar com um perfil diferente de alunos ao qual estava acostumado. Essa experiência proporcionou um grande amadurecimento em minha prática docente e na minha postura como professor, onde tive contato com outras metodologias de ensino e um público diferenciado em relação ao ensino regular.

Em fevereiro de 2005, iniciei minhas atividades no ensino superior, no qual estou até hoje. Iniciei lecionando a disciplina Álgebra Linear e, posteriormente, as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Equações Diferenciais para cursos de Engenharias em uma instituição privada situada no interior do Estado de Minas Gerais.

Refletindo a minha formação universitária e o fato de não estar atualizado quanto às tendências da Educação Matemática, as minhas aulas aconteceram da forma que vivenciei na faculdade: exposição teórica, exemplos, exercícios e provas.

Já nas primeiras aulas, o impacto foi grande. Observei a ausência de uma formação consistente na educação básica por parte dos alunos. Ao longo do tempo, fiquei "inconformado" com o elevado número de reprovações e desistências dos alunos. E sempre ouvia reclamações de professores de outras disciplinas dos cursos em que lecionava citando que os alunos não sabiam calcular uma simples derivada ou integral, analisar um gráfico ou resolver um sistema de equações lineares. Isso comprometia não apenas as disciplinas da área de Matemática, como também as de cunho específico às quais necessitavam de conhecimentos das disciplinas do núcleo básico.

Convivendo com essa situação e observando as dificuldades dos alunos, começaram a surgir algumas indagações:

- O que pode ser feito para modificar esse quadro?
- Por que a transição da Matemática escolar básica para a Matemática no ensino superior é difícil e problemática?
- Como suprir a falta de uma formação sólida da educação básica de modo a proporcionar ao aluno condições de cursar as disciplinas de Cálculo?

Quando iniciei a docência nas turmas de Cálculo Diferencial e Integral III no tema de funções de várias variáveis, verifiquei que as dificuldades dos alunos eram muito maiores quando comparadas com o cálculo de uma variável. Para exemplificar, cito algumas como:

- A visualização no cálculo de funções de várias variáveis que é muito complexa quando comparada com o cálculo de funções de uma variável;
- A dificuldade na transição dos conceitos do cálculo de funções de uma variável com os correspondentes no cálculo de funções de várias variáveis;
- A ausência de uma boa formação da Matemática na educação básica, bem como no cálculo de uma variável, dentre outras.

Assim, com a docência no ensino superior, surgiu o interesse em aprimorar minha qualificação profissional e cursar um mestrado. Então, em 2011, cursei as disciplinas isoladas "Ambientes Educacionais Informatizados" e "Educação Matemática no Ensino Superior" no Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da UFOP. Estas foram de fundamental importância para a minha escolha no Programa, onde iniciei como aluno regular no ano de 2012.

Vivenciando, na minha prática profissional, dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem de funções de várias variáveis, decidi investigar sobre esse tema, embora ainda tivesse dúvidas quanto ao caminho a seguir, bem como quanto aos procedimentos e recursos a serem utilizados na investigação.

Cursando a disciplina "Ambientes Educacionais Informatizados", tive o primeiro contato com leituras sobre a utilização de Tecnologias Digitais na Educação Matemática. Dentre as várias oficinas realizadas durante o semestre, uma delas foi de introdução ao *software* MAXIMA. A partir desse primeiro contato, passei a me interessar pela utilização desse *software* em minhas aulas. Identifiquei possibilidades de trabalhar os conceitos do cálculo de funções de duas variáveis, utilizando o MAXIMA em atividades que poderiam auxiliar o estudante a produzir conhecimento acerca desse conteúdo. Assim, naquele momento surgiu uma primeira ideia sobre o tipo de abordagem que utilizaria em minha pesquisa: o uso de tecnologias digitais para o cálculo de funções de várias variáveis.

A pesquisa[1]

A realização dessa pesquisa partiu do interesse desse pesquisador em investigar sobre o ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, especialmente as questões próprias do cálculo de funções de várias variáveis. Também foi considerada a percepção inicial de que a utilização do *software* MAXIMA poderia contribuir para o desenvolvimento de atividades sobre esse tema.

[1] A partir desse momento será usada a primeira pessoa do plural por se tratar da apresentação de trabalho desenvolvido de forma conjunta com a orientadora da pesquisa.

No entanto, sabe-se que a utilização de um *software* em determinadas atividades, por si só, não garante a aprendizagem e a produção do conhecimento matemático. Em leituras relativas ao uso de tecnologias tais como Borba (1999), Borba e Penteado (2001), Borba e Villarreal (2005), tivemos contato com o constructo teórico dos seres-humanos-com-mídias, segundo o qual o pensamento é reorganizado, e o conhecimento é produzido por um coletivo pensante com atores humanos e não humanos. Escolhemos então esse constructo teórico como um dos referenciais de nossa pesquisa.

Usamos também referenciais relativos ao ensino de Cálculo de uma ou mais variáveis, tais como Barufi (1999), Franchi (1999), Igliori (2009), Olímpio Júnior (2006), Reis (2009), Rezende (2003). Dedicamos especial atenção aos estudos que abordavam a temática do cálculo de várias variáveis, como Miranda (2010), assim como a transição do cálculo de uma para mais variáveis, como Alves (2011) e Imafuku (2008). Também procuramos referências em estudos abordando conjuntamente o ensino de Cálculo e o uso de tecnologias, como Giraldo (2004), Machado (2008), Martini (2011), Villarreal (1999), dentre outros.

E assim, iniciamos a pesquisa investigando a possibilidade de criar ambientes de aprendizagem nos quais os estudantes, com uso das tecnologias digitais e outras mídias, como o lápis-papel, constituindo um coletivo de seres-humanos-com-mídias, pudessem explorar conceitos matemáticos acerca de funções de duas variáveis, de modo a elaborar e testar conjecturas e produzir ideias matemáticas referentes ao tema. Para tanto buscamos aproveitar características que as mídias utilizadas oferecem, como as possibilidades de trabalhar diferentes representações: gráficas, numéricas e algébricas.

INTRODUÇÃO

Questão de investigação

Considerando a possibilidade de utilização de tecnologias digitais no ensino de Cálculo, assim como nosso interesse sobre o ensino de funções de várias variáveis, formulamos a seguinte questão de investigação: *Que ideias matemáticas acerca de funções de duas variáveis são produzidas em um coletivo de seres-humanos-com-mídias?*

Além de investigar a questão propriamente dita, esta pesquisa tem como objetivo geral identificar como se dá a produção de conhecimento acerca de funções de duas variáveis, num coletivo de seres-humanos-com-mídias, tendo como atores o *software* MAXIMA, os computadores e os alunos em grupos, interagindo com o professor-pesquisador. Os alunos são estudantes de um curso de Engenharia, cursando a disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, sob a responsabilidade do professor-pesquisador. E assim, definimos os seguintes objetivos específicos:

- Investigar contribuições da visualização e sua relação com aspectos algébricos para produção de ideias matemáticas acerca de funções de duas variáveis, em um coletivo de seres-humanos-com-mídias;
- Identificar o papel do *software* MAXIMA, usado em conjunto com outras mídias, como a oralidade e a escrita, na produção de conhecimento acerca de funções de duas variáveis;
- Investigar sobre possibilidades de tratar a transição do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis em um coletivo de seres-humanos-com-mídias.

A pesquisa de campo foi realizada no primeiro semestre de 2013 em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral III de um curso de

Engenharia de uma instituição privada de ensino superior, localizada no interior de Minas Gerais.

Realizamos cinco grupos de atividades relacionadas ao estudo de funções de duas variáveis, com uso do MAXIMA, abordando gráfico e domínio, curvas de nível, derivadas parciais, interpretação geométrica das derivadas parciais e extremos de funções de duas variáveis. Essas atividades foram realizadas com o auxílio do *software* MAXIMA e tiveram caráter exploratório, com questões abertas com o intuito de possibilitar a discussão, a interação (aluno-aluno, aluno-computador, aluno-professor), a compreensão e, consequentemente, a produção do conhecimento acerca de funções de duas variáveis. Elas tiveram o diferencial de uma dinâmica diferente para as aulas quando comparada com o estilo tradicional de aulas expositivas. Em cada uma delas, em um primeiro momento, foi realizada a exploração orientada dos temas, antes das apresentações teóricas dos conceitos, permitindo aos alunos transitarem nas diferentes mídias. Em algumas situações, surgiu naturalmente a transição do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis. Posteriormente às atividades exploratórias, os conceitos foram sistematizados teoricamente. Outras atividades sem a utilização de *software* também foram realizadas de modo conjunto, constituindo parte da proposta delineada para o desenvolvimento das aulas da disciplina e para as atividades da pesquisa.

Além disso, os estudantes responderam a dois questionários em momentos distintos: durante a realização da pesquisa e no término dela. Esses questionários tiveram o propósito de conhecer as impressões dos estudantes a respeito das atividades desenvolvidas e do conhecimento produzido a partir delas.

Este livro está dividido em quatro capítulos, além da introdução, das considerações finais, das referências bibliográficas e dos apêndices.

No primeiro capítulo, apresentamos aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral tanto de uma variável quanto de várias variáveis. Abordamos temas relacionados ao cálculo, como as dificuldades no seu ensino e aprendizagem, os altos índices de não aprovação e a metodologia tradicional de seu ensino. Também abordamos características do ensino do cálculo de várias variáveis, enfatizando a transição do cálculo de uma variável para várias variáveis.

No segundo capítulo, discorremos sobre o uso das tecnologias digitais no contexto educacional: possibilidades de uso, limitações e o impacto que tem ocasionado no espaço escolar. Descrevemos também uma das importantes características do uso das tecnologias na Educação Matemática: a visualização. Abordamos ainda o constructo seres-humanos-com-mídias, eixo principal utilizado para a criação e a análise das atividades desenvolvidas nesta pesquisa.

No terceiro capítulo, apresentamos os caminhos metodológicos seguidos no desenvolvimento dessa pesquisa, tais como as nossas escolhas, a concepção das atividades, os participantes, dentre outros.

No quarto capítulo, descrevemos as atividades realizadas em todas as etapas desta pesquisa, apresentamos os resultados obtidos e os analisamos à luz dos referenciais teóricos escolhidos.

Nas considerações finais, retomamos e ressaltamos os principais resultados obtidos, nossa percepção sobre a pesquisa realizada e apresentamos o Produto Educacional, elaborado a partir das atividades desenvolvidas com uso do MAXIMA, destinado a professores que tenham interesse nas questões relativas à abordagem de conceitos de funções de duas variáveis com uso de tecnologias digitais.

CAPÍTULO 1

O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Neste capítulo apresentamos aspectos relacionados ao ensino e a aprendizagem do Cálculo[2] de funções de uma ou mais variáveis. Embora nosso foco seja o estudo das funções de duas variáveis, entendemos que as pesquisas sobre o Cálculo, de modo geral, podem trazer informações importantes para compreendermos a problemática do ensino e a aprendizagem do Cálculo como disciplina básica dos cursos superiores.

1.1 O ensino de cálculo

O Cálculo está presente como disciplina básica em uma grande variedade de cursos universitários no Brasil: Engenharias, Estatística, Matemática, Física, Química, Arquitetura, Contabilidade, Geociências. Isso porque, devido às suas especificidades, o Cálculo é uma das ferramentas indispensáveis para a resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento.

A disciplina Cálculo é ministrada nos primeiros semestres de cursos das áreas classificadas como "exatas" e de algumas classificadas como "humanas" ou "biológicas" (BARUFI, 1999). Para essa autora, os diferentes cursos de Cálculo I pretendem levar os alunos a desenvolverem um estudo em maior ou menor profundidade, de acordo com a área de concentração, a respeito de funções de uma variável real. Já o Cálculo II (e, em algumas instituições, o Cálculo III) aborda as funções de mais de uma variável real.

A despeito de sua importância, o ensino e a aprendizagem do Cálculo apresentam dificuldades para muitos professores e estudantes. Assim,

[2] Doravante nesta pesquisa, ao utilizarmos a palavra Cálculo, estaremos nos referindo ao Cálculo Diferencial e Integral.

o Cálculo tem sido o foco de parte significativa das pesquisas no âmbito da Educação Matemática (IGLIORI, 2009; REIS, 2009).

> No que tange às especificidades das áreas da Matemática, pode-se constatar que, no Brasil e no exterior, o Cálculo Diferencial e Integral tem ocupado parte significativa das pesquisas. Isto se justifica tanto pelo fato de o Cálculo constituir-se um dos grandes responsáveis pelo insucesso dos estudantes quanto por sua condição privilegiada na formação do pensamento avançado em Matemática. (IGLIORI, 2009, p. 13)

A prática docente no ensino de Cálculo é caracterizada em muitos casos por uma abordagem tradicional, baseada na exposição teórica, exemplos, exercícios. Nesse caso, o ensino de Cálculo é reduzido à memorização e à aplicação de uma série de técnicas, regras e procedimentos em detrimento da compreensão (VILLARREAL, 1999). Para essa autora,

> Parece existir um discurso oficial na universidade o qual pretende antepor o raciocínio à memorização, privilegiar a compreensão à repetição, favorecer a resolução de problemas à execução de exercícios, mas ao mesmo tempo, esconde uma forma de agir que só veste as "modernas roupas da mudança" sem viver o profundo significado desse discurso. (VILLARREAL, 1999, p. 4)

Para muitos professores, existe pressa e ansiedade para rapidamente transmitirem os conteúdos aos seus alunos. E isso significa, em muitos casos, o privilégio da repetição e a memorização em detrimento da compreensão, tornando o ensino algoritimizado e técnico.

O aluno, de modo geral, segue modelos apresentados pelo professor por meio de exemplos resolvidos em sala de aula e os usa para resolução de extensas listas de exercícios. Dessa forma, o conhecimento, que é apresentado pronto aos alunos, é usado para treinar como resolver exercícios que seguem determinados padrões. Essa prática é muito comum em nossas universidades.

> A produção de listas de exercícios é sem dúvida a solução "normal" mais usual em nossas universidades: já faz parte da tradição de um curso de Cálculo a presença de extensas listas de exercícios, com gabarito, para que os alunos possam realizar o seu "treinamento" com segurança. (REZENDE, 2003, p. 15)

Assim, embora o discurso seja a ênfase na compreensão de conceitos e na atribuição de significados aos conteúdos, a prática é outra. No momento das avaliações, o que se pede em geral são as técnicas: os cálculos dos limites, das derivadas, etc. (REZENDE, 2003) ou o produto final: a equação da reta, o número exato, etc. (VILLARREAL, 1999).

Nessa abordagem, apoiada em aulas expositivas, também é dada grande importância ao conhecimento pronto, acabado e inquestionável. Franchi exemplifica citando o caso da apresentação de um teorema aos alunos: "inicia-se com seu enunciado, quando na verdade este foi o último passo na sua elaboração" (FRANCHI, 1993, p. 5). Perde-se o processo de construção do conhecimento matemático. O produto desse processo é por onde começamos.

Assim, um dos grandes problemas do ensino, não sendo restrito apenas ao Cálculo, é que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos e acabados, ao invés de construí-los com seus alunos.

É possível que as práticas descritas anteriormente estejam contribuindo para os resultados insatisfatórios obtidos na disciplina Cálculo e para o elevado número de reprovações nos primeiros períodos dos cursos universitários. Barufi (1999) realizou uma pesquisa sobre os índices de reprovação em Cálculo na Universidade de São Paulo (USP) considerando o contexto do Instituto de Matemática e Estatística (IME) e o Instituto de Geociência dessa mesma universidade, no período de 1990 a 1995. Observou altos índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo nessa universidade no ano de 1995: taxa de não aprovação, variando de 43,8% a 66,9% nas disciplinas de Cálculo para Funções de uma Variável e Cálculo Diferencial e Integral oferecidas pelo IME. Observou também um alto índice de não aprovação na Escola Politécnica, que foi de 46,9%, e no Instituto de Geociências da USP, 74,9%.

Rezende (2003) descreve em sua pesquisa uma situação ainda mais preocupante onde o índice de não-aprovação da Universidade Federal Fluminense (UFF), no período de 1996 a 2000, esteve entre 45% e 95%.

Apesar de as pesquisas citadas terem sido realizadas já há algum tempo, observamos que esses índices de não-aprovação nas disciplinas de Cálculo ainda continuam elevados em diversos cursos e instituições.

Em nossa experiência profissional, sempre ouvimos, em relatos de professores, a atribuição do fracasso dos estudantes na disciplina Cálculo à "falta de base", ou seja, à deficiência na formação básica em matemática. Procurando solucionar esse problema, muitos cursos incluíram em suas matrizes curriculares disciplinas como Pré-Cálculo, Cálculo 0, Matemática Básica, etc. Nessas disciplinas, ministra-se parte da Matemática Básica considerada como pré-requisito para o Cálculo, abordando conteúdos como polinômios, produtos notáveis e fatoração, identidades trigonométricas, funções reais, dentre outros (REZENDE, 2003).

Rezende (2003, p. 17) argumenta que a falta de base é também percebida em outras disciplinas, não sendo um problema específico do Cálculo: "A 'base' que falta aqui, para o ensino de Cálculo, também faz falta para o ensino de outras disciplinas do curso superior, e nem por isso os seus resultados são tão catastróficos como os do Cálculo". O autor relata que, no caso da Universidade Federal Fluminense, a disciplina chamada Matemática Básica não atingiu o objetivo de reduzir o número de não-aprovados no Cálculo I, que permaneceu na faixa dos 70% a 90% no segundo semestre de 1998. Para esse autor, esse fato mostra que os alunos têm carência de uma formação básica que não foi resolvida pela disciplina.

Uma prática comum entre muitos professores de Cálculo é a de sempre utilizar a mesma metodologia para o ensino do Cálculo, desconsiderando a natureza do curso ao qual a turma pertence, ministrando as aulas da mesma forma, com os mesmos exemplos, aplicações, etc. (REIS, 2009). Também desconsideram as dificuldades inerentes à transição da educação básica para a educação superior e as diferenças do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado. Assim, suprir os estudantes de conhecimentos básicos pode não ser suficiente para resolver as dificuldades no Cálculo.

> O campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de "infinito", de "infinitésimos", de "variáveis", do que com "fatoração de polinômios", "relações trigonométricas", "cálculos algébricos" etc. (REZENDE, 2003, p.18)

Os problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem do Cálculo não são exclusivos do Brasil. No cenário internacional, aconteceu, na década de 1980, nos Estados Unidos, o movimento conhecido como "Calculus Reform" (Reforma do Cálculo). Um dos pontos sugeridos nesse movimento foi o uso da tecnologia, como calculadoras gráficas e *softwares* educacionais, para a aprendizagem e resolução de problemas (REZENDE, 2003). No ensino do Cálculo, todos os problemas e os conceitos deveriam ser abordados de forma algébrica, numérica e gráfica, o que era conhecido como "Regra dos Três". Posteriormente, expandiu-se para a "Regra dos Quatro" incluindo a forma verbal ou descritiva (STEWART, 2010).

Villarreal (1999) descreve vários trabalhos relacionados à introdução do uso dos computadores no ensino de Cálculo no período do movimento "Calculus Reform". Em sua análise, das propostas de cursos de Cálculo que utilizam computadores, "a tecnologia não é uma solução para os problemas pedagógicos, mas antes uma oportunidade para pensar sobre resolver aqueles problemas de formas novas" (VILLARREAL, 1999, p. 30). A autora apresenta os aspectos do uso da tecnologia que podem ser entendidos como argumentos a favor de sua utilização.

> 1) Ilustra e reforça conceitos básicos; 2) reduz a preocupação com as técnicas de cálculo e permite concentrar-se nas ideias centrais do Cálculo abordando aplicações mais realistas; 3) comunica novas ideias visuais e experimentalmente

> antes de passar a uma explicação através de palavras; 4) oferece imagens que, de outra forma, seriam inacessíveis para os estudantes. (VILLARREAL, 1999, p. 30)

Após esse movimento da reforma do Cálculo, muitos autores de livros didáticos passaram a considerar os pressupostos da reforma e incluir textos e exercícios com esse enfoque. Como exemplo, citamos o livro Cálculo, de James Stewart (STEWART, 2010), que teve sua primeira edição em 1987. Nesse livro, é dada ênfase na compreensão de conceitos. Esse autor comenta no prefácio:

> A ênfase aqui é na compreensão de conceitos. Creio que quase todos concordam que este deve ser o objetivo principal do ensino de cálculo. Na verdade, o ímpeto que norteia o atual movimento de reforma no ensino de cálculo vem da Conferência de Tulane de 1986, que teve como principal recomendação: concentrar-se na compreensão de conceitos. (STEWART, 2010, p. V)

Além dos aspectos gerais já apontados sobre o ensino de Cálculo, é importante considerar também questões específicas do Cálculo de mais de uma variável, que apresentam dificuldades adicionais. Na próxima seção, discorreremos sobre o que dizem as pesquisas sobre o tema.

1.2 O cálculo de funções de várias variáveis

Sabemos que muitas das dificuldades com o ensino e a aprendizagem do cálculo de várias variáveis aparecem em decorrência de deficiências na aprendizagem de conceitos da matemática da educação básica. Outras se referem aos conceitos relativos ao cálculo de uma variável e às características do pensamento matemático avançado. Porém muitas delas são específicas do cálculo de várias variáveis.

Buscando conhecer essas especificidades, fizemos uma pesquisa no banco de teses da CAPES. Focalizamos no período de 2001 a 2012 e usamos “cálculo a várias variáveis” como palavra-chave. Encontramos apenas a pesquisa de Alves (2011) e por meio dela chegamos à de Imafuku (2008). Tomamos contato também com a pesquisa de Miranda (2010) realizada no Programa da UFOP.

A pesquisa de Miranda (2010) aborda o estudo de funções reais de duas variáveis, especificamente, gráficos e superfícies no R^3, na disciplina Cálculo II do curso de Matemática no Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP). Usou como referenciais a Teoria da Aprendizagem Significativa (TSA) de Ausubel e o Pensamento Matemático Avançado (PMA), tratando das características do pensamento visual-espacial e dos conceitos de imagem conceitual e definição conceitual. Como parte da pesquisa, foram desenvolvidas atividades para esboço de gráficos em duas e três dimensões, bem como gráficos de superfícies com suas respectivas curvas de nível com a utilização do *software* Wimplot.

A pesquisa de Imafuku (2008) teve o objetivo de verificar as dificuldades e saberes manifestados pelos estudantes relativos à transição[3] do estudo das funções de uma variável para o caso de funções de duas variáveis em diversos aspectos, como o domínio e o gráfico, as derivadas parciais, dentre outros.

Imafuku (2008) relata que mesmo os alunos que foram bem-sucedidos nas disciplinas do cálculo de uma variável, muitas vezes, apresentam dificuldades diante de situações que envolvam funções definidas por mais de uma variável. Essas dificuldades estão relacionadas ao seu significado, à sua representação gráfica, dentre outras. Muitos desses alunos bem-sucedidos podem ter apenas decorado os procedimentos e técnicas do cálculo de uma variável. Isso enfatiza mais uma vez a ênfase dada à técnica procedimental para a resolução dos exercícios em detrimento da atribuição de significados e da compreensão.

Em relação à transição do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis, Imafuku (2008) descreve a dificuldade dos alunos

[3] Imafuku usa a palavra transição se referindo às dificuldades que representam a passagem do estudo das funções de uma para duas variáveis.

em estender o conceito de domínio de uma função de uma variável para uma função de duas variáveis, no que se refere à relação da variável dependente com as independentes.

> Em nossa prática, pudemos perceber que os estudantes, na maioria dos casos, acham que a relação entre as variáveis nas funções de uma variável, ou seja, em que a variável y sempre depende da variável x, se estende para as funções de duas variáveis em que z depende de x e y, e continuam considerando que, nesse caso, y continua dependendo de x e, uma vez que esclarecemos esse fato, a compreensão do conceito de função passa a ser maior. Por outro lado, os estudantes fazem confusão entre os elementos do domínio das funções de uma e os de duas variáveis. (IMAFUKU, 2008, p. 25)

Os estudos que abordam os aspectos da transição interna do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis são em número consideravelmente menor do que os que abordam apenas o cálculo de uma variável. Alves (2011) relata que esses estudos são mais difíceis de serem encontrados do que os que analisam a transição do ensino escolar da educação básica para o ensino da Matemática no ensino superior.

Em sua pesquisa intitulada: Aplicação da sequência Fedathi[4] no ensino intuitivo do Cálculo a Várias Variáveis, Alves (2011) identificou e descreveu as categorias do raciocínio intuitivo[5] ao longo das fases de ensino da metodologia denominada Sequência Fedathi, dando ênfase à descrição da transição interna do cálculo a uma variável para o cálculo a várias variáveis. De acordo com Alves (2011), esse fato não é observado em estudos acadêmicos.

Alguns elementos específicos do Cálculo de Várias Variáveis (CVV) podem gerar dificuldades no ensino e na aprendizagem, dentre eles estão: a visualização, que é muito complexa quando comparada com o Cálculo de Uma Variável (CUV) e as dificuldades na transição dos con-

[4] Sequência Fedathi, de acordo com Alves (2011), é uma proposta teórico-metodológica apresentada por um grupo de educadores matemáticos do estado do Ceará.

[5] O autor cita em sua pesquisa as seguintes categorias: intuição afirmativa, intuição conjectural e intuição antecipatória.

ceitos do cálculo de uma variável com os correspondentes no cálculo de várias variáveis.

Na transição interna, Alves (2011) aponta questões e elementos que necessitam ser considerados:

> (i) um sistema de representação simbólica mais complexo do que o outro; (ii) as argumentações envolvidas na demonstração dos teoremas são mais complexas, inclusive a natureza das *definições formais* envolvidas; (iii) a natureza geométrica dos objetos envolvidos; (iv) a mudança da significação conceitual interpretada em um novo *locus matemático* e (v) o surgimento de regras operatórias particulares do CUV e do CVV; (vi) regras operatórias válidas num contexto e inapropriadas em outro; (vii) teoremas do CUV sem interpretações semelhantes no CVV; (viii) definições formais que envolvem uma mudança de significado de acordo com a teoria formal; (ix) generalização de noções e definições formais; (x) surgimento de conceitos no CVV que não possuem significados correspondentes no CUV. (ALVES, 2011, p. 61)

Para exemplificar, mostramos, na Figura 1, o quadro de transição interna do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis, exposto por Alves (2011).

(I)		*(II)*
$Lim_{x\to a} f(x) = L$	$\xrightarrow{\text{processo de limite}}$	$Lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$
$f'(x_0) = Lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$	$\xrightarrow{\text{derivação}}$	$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = Lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$
$\int_a^b f(x,y)$	$\xrightarrow{\text{processo de integração}}$	$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy$

FIGURA 1 - Quadro de transição interna do CUV para o CVV
Fonte: Adaptado de Alves, 2011, p.62.

Na Figura 1, observamos aspectos da representação simbólica de elementos do cálculo relativo às funções $y = f(x)$ e $z = f(x, y)$ que, no cálculo de várias variáveis, por serem mais complexas quando comparado com o cálculo de uma variável. Entendemos que essa complexidade vai além da simples representação simbólica; ela também está presente nas definições, nos conceitos e nas representações geométricas.

Para Alves (2011), alguns elementos da transição do CUV para o CVV podem atuar como entraves à aprendizagem. Para esse autor, em toda mudança, existem conflitos. Nesse sentido, Alves (2011) compara essa transição com a "transição escola-universidade" que se caracteriza por um momento de mudanças e conflitos interferindo nos conhecimentos que já foram construídos e nos conhecimentos que ainda serão construídos no ambiente universitário.

Alves (2011) defende a ideia de que alguns aspectos do cálculo de várias variáveis poderiam ser explorados no cálculo de uma variável. Um dos exemplos citados por esse autor é a abordagem de funções do tipo $z = f\left(x\right)$ ou $z = f\left(y\right)$ (como curvas no espaço tridimensional) e as taxas de variação desse tipo de função (como derivada ordinária $\frac{dz}{dx}$).

Tendo discorrido sobre a problemática do ensino de cálculo, vamos, no capítulo a seguir, apresentar aspectos do uso das tecnologias na Educação Matemática, em especial no ensino e aprendizagem do cálculo, uma vez que acreditamos que esse uso pode ser uma alternativa para enfrentamento das dificuldades aqui discutidas.

CAPÍTULO 2

AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos aspectos relacionados ao uso das tecnologias digitais nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, possibilidades, vantagens e também os obstáculos e os conflitos que podem surgir decorrentes desse uso. Discorremos também sobre uma das importantes potencialidades das tecnologias digitais na exploração de conceitos matemáticos: a visualização.

2.1 As tecnologias digitais na Educação Matemática

Os grandes avanços tecnológicos das últimas décadas têm causado significativas mudanças na sociedade atual, tanto no seu "modo de pensar" quanto no "modo de viver", modificando as formas de comunicação e interação entre os indivíduos e, consequentemente, alterando significativamente a forma pela qual se busca e produz conhecimento.

Nesse contexto, as tecnologias digitais têm influenciado e provocado mudanças nas formas de ver, utilizar e produzir Matemática, não tendo a Educação Matemática permanecido indiferente a essa situação (MACHADO, 2008).

Os computadores, celulares e *tablets* fazem parte do cotidiano de alunos e professores e sua presença nas escolas é inevitável. No entanto, a simples presença da tecnologia não garante mudanças no ensino.

Essa percepção atual já era evidenciada nas falas de Gravina e Santarosa (1998) há dezesseis anos e de Borba e Villarreal (2005) há nove anos:

> Mas os ambientes informatizados, na forma que se apresentam hoje, por si só, não garantem a construção do conhecimento. Para que haja avanço no conhecimento matemático, é importante que o professor projete as atividades

> a serem desenvolvidas. Uma tarefa difícil é conciliar o que se julga importante a ser aprendido (e é matemática socialmente aceita que fornece os parâmetros para tal) com a liberdade de ação do aluno. (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p. 21)

> Dentro da comunidade da educação matemática, uma das poucas questões em que há consenso a respeito da discussão sobre tecnologia é que os computadores por si só não são capazes de trazer qualquer mudança, e que uma intensa discussão pedagógica deve ser realizada. Em outras palavras, se a decisão é usar a tecnologia em Sala de Aula, o debate ainda está aberto sobre como usá-la, a partir da perspectiva do professor e dos alunos, bem como do ponto de vista de outros atores no cenário da educação matemática[6]. (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 2)

A inserção das tecnologias oferece possibilidades que, para muitos professores, não estavam disponíveis em sua formação acadêmica, exigindo mudanças dos métodos utilizados nos processos educacionais. Para Machado (2008):

> A utilização das tecnologias digitais em Sala de Aula exige mudanças na atividade prática do professor. É preciso que o professor incorpore, em suas práticas pedagógicas, a tecnologia, de modo a agir e a interagir com critério, com ética e estar atento às possibilidades e limites dessas tecnologias no ambiente escolar. (MACHADO, 2008, p. 20)

Por não terem vivenciado essa possibilidade em sua formação, muitos professores se sentem inseguros para utilizar tecnologias nos processos educacionais. Para Borba e Penteado (2001), muitos professores preferem conduzir suas atividades na chamada “zona de conforto”, não avançando para uma “zona de risco”. Os autores usam o termo “zona de conforto” para caracterizar contextos de pouco movimento, nos quais

[6] *Within the mathematics education community, one of the few issues on which there is consensus regarding the discussion about technology is that computers alone are not likely to bring any change, and that intense pedagogical discussion should be undertaken. In other words, if the decision is made to use technology in the classroom, the debate is still open regarding how to use them, from the perspective of the teacher and the students, as well as from the standpoint of other actors in the mathematics education landscape.*

os professores evitam caminhos que possam gerar incertezas e imprevisibilidades. Nessa "zona de conforto", quase tudo é previsível e pode ser controlado pelo professor. A "zona de risco" caracteriza-se pela perda do controle e imprevisibilidade causada por diferentes fatores. Como aspectos que caracterizam a "zona de risco", os autores citam a organização do espaço físico da sala de aula, que afeta o comportamento de professores e alunos, exigindo do professor novos conhecimentos e ações. Citam também a possibilidade de acontecerem problemas técnicos e também o fato de poderem surgir diferentes caminhos durante a realização de uma atividade com o uso do computador.

Ainda devemos considerar que, se o seu uso não é adequado, "o computador pode trazer dificuldades adicionais tanto no ensino quanto na aprendizagem matemática (VILLARREAL, 1999, p. 27)". Para essa autora, se as atividades que são planejadas para serem realizadas em ambientes computacionais puderem ser realizadas sem dificuldades em um ambiente lápis-papel, o uso do computador pode dificultar. Se o uso do computador não é indispensável, não há porque demandar tempo com o aprendizado dos comandos.

Para Moran (2013, p.12), "o avanço no mundo digital traz inúmeras possibilidades, ao mesmo tempo em que deixa perplexas as instituições sobre o que manter, o que alterar, o que adotar".

As salas de aula em muitas de nossas escolas têm se caracterizado por serem espaços de pouca interação no qual os professores estão "amarrados" ao cumprimento de seus planos de ensino. Nesses casos, muitas vezes se valoriza mais a quantidade de conteúdo que se ensina do que a real construção do conhecimento por parte dos alunos.

Enquanto a sociedade muda e experimenta desafios cada vez mais complexos, na educação formal, em muitos casos predomina a prática de uma visão conservadora, repetindo o que está consolidado, o que não gera riscos e nem grandes tensões. (MORAN, 2013)

> A escola precisa reaprender a ser uma organização efetivamente significativa, inovadora, empreendedora. Ela é previsível demais, burocrática demais, pouco estimulante para os bons professores e alunos. Não há receitas fáceis e

> nem medidas simples. Mas a escola está envelhecida em seus métodos, procedimentos, currículos. A maioria das instituições superiores se distancia velozmente da sociedade, das demandas atuais. Elas sobrevivem porque são os espaços obrigatórios para certificação. Na maior parte do tempo, os alunos frequentam as aulas porque são obrigados, não por escolha real, por interesse, por motivação, por aproveitamento. (MORAN, 2013, p.12)

Uma das possibilidades de promover mudanças nesse cenário é a constituição de ambientes com a presença de tecnologias nos quais os estudantes tenham oportunidade de explorar situações novas, experimentar, testar suas conjecturas, favorecendo assim a aprendizagem e a produção do conhecimento.

Skovsmose (2000) caracteriza diferentes tipos de ambientes de aprendizagem e, entre eles, estão os que dão suporte a trabalhos de investigação, aos quais chama de "cenários para investigação". O autor destaca a possibilidade de as tecnologias favorecerem o estabelecimento desses cenários.

> Os computadores na educação matemática têm ajudado a estabelecer novos cenários para investigação (embora alguns programas fechados tentem eliminar incertezas, ajustando as atividades ao paradigma do exercício). O computador desafiará a autoridade do professor (tradicional) de matemática. Alunos trabalhando com, por exemplo, geometria dinâmica facilmente encontram possíveis situações e experiências que os professores não previram ao planejarem a aula. (SKOVSMOSE, 2000, p. 66)

Outras características dos ambientes informatizados são as possibilidades de experimentação, de diferentes representações, de modelagem e de simulação.

> O recurso de simulação permite a realização de experimentos envolvendo conceitos mais avançados. Neste caso, a complexidade analítica do modelo fica por conta do programa e os alunos exploram qualitativamente as relações matemáticas que se evidenciam no dinamismo da

> representação de caráter visual. Na exploração qualitativa não há preocupação com a dedução das relações matemáticas analíticas. Esta abordagem permite que alunos, ainda sem grande formação matemática, explorem fenômenos de natureza matemática complexa, mas que do ponto de vista puramente qualitativo são fecundos "germes" de ideais matemáticas, como por exemplo, as simulações de crescimento populacional e mais geralmente de sistemas dinâmicos. (GRAVINA e SANTAROSA, 1998, p.12)

Nesse sentido, consideramos importante oportunizar aos estudantes contato com ambientes informatizados variados, de modo que as características de cada um possam ser utilizadas de acordo com os objetivos que se busca atingir. No caso de nossa pesquisa, daremos especial atenção à visualização, pois consideramos que pode trazer alternativas para exploração de conceitos relativos às funções de duas variáveis. A possibilidade de constituição de ambientes, formados por humanos e não-humanos, com a presença de diferentes mídias (dentre elas, a informática), e a produção de conhecimento matemático nesses coletivos será abordada na próxima seção.

2.2 Os seres-humanos-com-mídias e a produção do conhecimento matemático

Borba e Villarreal (2005) apresentam a ideia de que o conhecimento é sempre produzido por um coletivo de seres humanos e não humanos, ou seja, seres-humanos-com-mídias. Utilizam a ideia de que o pensamento humano é reorganizado com a presença de diferentes mídias, como os computadores e suas diferentes interfaces.

O constructo teórico seres-humanos-com-mídias, descrito por Borba e Villarreal (2005), apoia-se em conceitos trabalhados por Tikhomirov (1981) e Levy (1993). Tikhomirov (1981) analisa o papel do computador e sua relação com a atividade humana sob uma perspectiva psicológica, propondo que a utilização de uma mídia como a informática reorganiza o pensamento e, dessa forma, afeta a cognição humana. As ideias de Levy (1993), consideradas pelos autores, referem-se ao pensamento coletivo e às tecnologias da inteligência. Por serem conceitos fundantes do referencial que adotamos nessa pesquisa, consideramos importante trazê-los para o texto.

Tikhomirov (1981) apresenta três teorias que caracterizam de maneiras diferentes a relação entre os seres humanos e os computadores. A primeira teoria é conhecida como *Teoria da Substituição*, na qual o computador é visto como um substituto do ser humano, chegando ao mesmo resultado com menos erros e maior velocidade. Para Borba (1999):

> Tal teoria não deve ser abraçada na medida em que trivializa o pensamento, ao ignorar os complexos processos humanos pelos quais um problema é eleito para ser resolvido e como que a busca de soluções desenvolvida por humanos é fundamentalmente diferente do desenvolvido pelo computador. (BORBA, 1999, p. 286)

A segunda teoria proposta por Tikhomirov (1981) é a *Teoria da Suplementação*, onde o computador é visto como um suplemento do ser humano. "Essa teoria está baseada na teoria da informação, que defende que o pensamento pode ser dividido em pequenas partes." (BORBA, 1999, p. 287). Nessa visão de pensamento, há uma justaposição do ser humano ao computador, com o ser humano realizando algumas partes e o computador, outras. Mas Borba (1999) enfatiza que um problema não deve ser decomposto e sim entendido de forma global. Nesse modelo de pensamento humano, são ignoradas a escolha e as possíveis soluções para um problema.

Por fim, Tikhomirov (1981) apresenta a terceira teoria: a *Teoria da Reorganização do Pensamento*, apresentando a ideia de que "a estrutura da atividade intelectual humana é modificada pelo uso do computador, sua mediação reorganiza os processos de criação, de armazenamento de informação e o estabelecimento de relações humanas". (VILLARREAL, 1999, p. 9)

Tikhomirov (1981) defende que a informática desempenha papel semelhante ao desenvolvido pela linguagem na teoria de Vygotsky. Dessa forma, propõe uma interação entre técnica e ser humano, ou seja, uma relação entre informática e pensamento.

Levy (1993) utiliza a noção de tecnologias da inteligência para relacionar três técnicas que estão associadas à memória e ao conhecimento: a oralidade, a escrita e a informática. Levy (1993) enfatiza que as mídias sempre estiveram interligadas com a história da humanidade. Essas tecnologias da inteligência são consideradas extensões da nossa memória. Da mesma forma que o surgimento e a difusão da escrita permitiram que a memória se estendesse de modo qualitativamente diferente em relação à oralidade, a informática é a nova extensão da memória. (BORBA, 1999, p. 138)

> A tecnologia da informação deve ser entendida da mesma maneira. É uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação a outras tecnologias da inteligência, e torna possível desafiar o raciocínio linear por outras formas de pensar, baseadas em simulação, experimentação, e uma "nova linguagem" que envolve oralidade, escrita, imagens, e comunicação instantânea.[7] (BORBA e VILLARREAL, 2005. p. 22)

De acordo com Borba (1999), um dos pontos comuns entre as ideais de Tikhomirov e Levy é que não deve existir dicotomia entre técnica e seres humanos, mas sim uma interação entre ambos.

Borba e Villarreal (2005) afirmam que os seres humanos e máquinas são vistos na maioria dos casos como conjuntos disjuntos apesar da ideia de que os computadores podem mediar a produção do conhecimento. Mesmo assim, a "unidade cognitiva" é vista como sendo apenas o ser humano e não seres-humanos-computador, seres-humanos-computador-papel-lápis-oralidade, etc. Essa noção pode induzir as pessoas a pensarem que o papel dos computadores é apenas complementar às atividades humanas, subestimando a importância das tecnologias na produção do conhecimento. Os autores propõem os seres-humanos-com-mídias como unidade cognitiva.

---

[7] *Information technology should be understood in the same way. It is a new extension of memory, with qualitative differences in relation to other technologies of intelligence, and makes it possible for linear reasoning to be challenged by other ways of thinking, based on simulation, experimentation, and a "new language" that involves writing, orality, images and instantaneous communication.*

Com relação aos ambientes de aprendizagem com o uso do computador, existem muitas maneiras de utilizá-los para favorecer a produção do conhecimento matemático. Nesse aspecto, Borba e Villarreal (2005) enfatizam que precisamos entender as mudanças no pensamento das pessoas, quando estas estão envolvidas em atividades em que os computadores estão disponíveis.

Para Borba e Villarreal (2005), devemos ter atenção para o que acontece quando o sistema humano-computador resolve problemas. Assim, as diferentes formas de respostas proporcionadas pelo computador podem contribuir para o aparecimento de novos problemas. Quando os computadores são utilizados para a resolução e/ou geração de problemas, pode haver a reorganização do pensamento. Os autores afirmam ainda que não há consenso na comunidade da Educação Matemática sobre como as diferentes formas de reorganização do pensamento matemático podem ocorrer em um processo educacional, no entanto, consideram que "mudanças nas práticas educacionais devem levar em conta esta reorganização do pensamento e da solução de problemas por sistemas humanos-computador"[8]. (BORBA e VILLARREALL, 2005, p. 14)

Borba e Villarreal (2005) citam autores como Noss e Hoyles que destacam o papel dos computadores ou de outras ferramentas como mediadores do conhecimento:

> [...] focalizando a tecnologia chama a atenção para a epistemologia: novas tecnologias – todas as tecnologias – inevitavelmente alteram a forma como o conhecimento é construído e o que isso significa para cada indivíduo. Isto é verdade para o computador, como é para o lápis, embora a novidade do computador force nosso reconhecimento do fato.[9] (BORBA e VILLARREAL, 2005, p.15)

---

[8] *Changes in educational practices should take into account this reorganization of thinking and the solution of problems by humans-computer systems.*

[9] *Focusing on technology draws attention to epistemology: for new technologies – all technologies – inevitably alter how knowledge is constructed and what it means to any individual. This is true for the computer as it is for the pencil, but the newness of the computer forces our recognition of the fact.*

Nessa perspectiva, Borba e Villarreal (2005) sugerem que os seres humanos sejam afetados pelas técnicas, que estendem e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses mesmos seres humanos estão constantemente transformando essas técnicas, ou seja, as tecnologias. A esse processo chamam de moldagem recíproca.

Borba e Villarreal (2005) utilizam as metáforas seres-humanos-com-mídia, humanos-mídia ou humanos-com-tecnologias, com o intuito de levar a *insights* sobre a produção do próprio conhecimento.

> Em nossa opinião, esta metáfora sintetiza uma visão da cognição e da história da tecnologia que torna possível analisar a participação dos "atores" das novas tecnologias da informação nesse pensamento coletivo, de uma maneira que nós não julgamos se há "melhoria" ou não, mas em vez disso identificamos as transformações na prática. Em outras palavras, esta noção é adequada para mostrar como o pensamento é reorganizado com a presença das tecnologias da informação, e que tipos de problemas são gerados por coletivos que incluem os seres humanos e as mídias como papel e lápis, ou várias tecnologias de informação.[10] (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 23)

Assim, para esses autores, o conhecimento é produzido com uma determinada mídia ou tecnologia da inteligência.

> É por esta razão que adotamos uma perspectiva teórica que suporta a noção de que conhecimento é produzido por um coletivo composto de seres-humanos-com-mídia, ou humanos-com-tecnologias, e não, como outras teorias sugerem, por apenas os indivíduos humanos, ou coletivos composto apenas de seres humanos. (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 23)

---

[10] *In our opinion, this metaphor synthesizes a view of cognition and of the history of technology that makes it possible to analyze the participation of new information technology "actors" in these thinking collectives in a way that we do not judge whether there is "improvement" or not, but rather identify transformations in practice. In other words, this notion is appropriate for showing how thinking is reorganized with the presence of information technologies, and what types of problems are generated by collectives that include humans and media such as paper-and-pencil, or various information technologies.*

Para Borba (1999) e Borba e Villarreal (2005), o processo de produção do conhecimento se dá em um coletivo de atores humanos e não humanos. Afirmam que as diferentes mídias, como a oralidade, a escrita e a informática possibilitam a reorganização de nosso pensamento, condicionando a forma como produzimos conhecimento. Entende-se que os computadores não substituem o ser humano e nem são justapostos a eles. Eles interagem e fazem parte de um coletivo pensante não sendo apenas ferramentas neutras ou que têm um papel periférico na produção do conhecimento.

Desse modo, o aluno é um dos atores do coletivo seres-humanos-com-mídias, tendo papel ativo na produção do conhecimento matemático que acontece nesse coletivo pensante. Na próxima seção, discorreremos sobre possibilidades de visualização oportunizadas pela tecnologia informática e sua relação com a geração de ideias matemáticas no coletivo seres-humanos-com-mídias.

2.3 Tecnologias digitais e a visualização na Educação Matemática

A visualização tem papel reconhecidamente importante na aprendizagem da Matemática e, por isso, tem sido foco de estudos na Educação Matemática (PINTO, 2009; FROTA, 2013).

Mas o que é visualizar? Encontramos nos dicionários alguns significados: "Tornar visual ou visível. Ver uma imagem mental" (MICHAELIS, 2008, p. 915); "Transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis. Visualizar o irreal" (AURÉLIO[11]). Chamamos atenção para o fato de que esses significados dizem respeito não apenas ao que efetivamente se enxerga em determinado momento, mas também àquelas imagens que são formadas na mente. Essas duas possibilidades nos parecem importantes para a exploração de conceitos matemáticos com uso de *softwares*.

---

[11] http://www.dicionariodoaurelio.com, acesso em 23/10/2013.

Para Flores, Wagner e Burato (2012), o termo visualização provém do campo da psicologia. Inicialmente esse termo era utilizado para associar as habilidades que os indivíduos tinham em interpretar imagens. Entretanto existem diferenças quanto à caracterização do termo visualização: "habilidade espacial, imagens, imagem visual e visualização são termos frequentemente utilizados e definidos[12]". (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 80)

As possibilidades da visualização na Educação Matemática são citadas por diversos autores. Borba e Villarreal (2005), Couy (2008), Guzmán (2002), Machado (2008), Presmeg (2006), dentre outros, apresentam diferentes estudos sobre o termo visualização, a sua importância e utilização.

Presmeg (2006) expõe uma revisão teórica sobre uma diversidade de propostas relacionadas à visualização no início da década de 1980. Para essa autora, nesse período, surgiram as primeiras pesquisas, fundamentadas na Psicologia, sobre a abordagem do pensamento visual no ensino e na aprendizagem da Matemática.

> A década de 1980 foi um importante divisor de águas: o construtivismo estava em ascensão, contrariando a influência do behaviorismo; e as metodologias da pesquisa qualitativa estavam começando a serem aceitas como valiosas para abordar questões complexas em educação matemática. O período era propício para um renovado interesse no papel do pensamento visual no processo de ensino e aprendizagem da matemática, e a pesquisa qualitativa um veículo adequado para investigar de outra maneira os inacessíveis processos de pensamento associados com o uso de imagens mentais e associadas formas de expressão na aprendizagem da matemática[13]. (PRESMEG, 2006, p. 2)

---

[12] *Spatial ability, imagery, visual image and visualization are terms frequently used and defined.*

[13] *The decade of the 1980s was an important watershed: constructivism was on the rise, countering the influence of behaviorism; and qualitative research methodologies were beginning to be accepted as valuable for addressing complex questions in mathematics education. The period was ripe for a renewed interest in the role of visual thinking in the teaching and learning of mathematics, and qualitative research was a suitable vehicle for investigating the otherwise inaccessible thought processes associated with the use of mental imagery and associated forms of expression in learning mathematics.*

Arcavi (2003) relata que a visão é fundamental para o nosso ser biológico e sociocultural. Para esse autor, do ponto de vista biológico, a visão é a nossa mais importante fonte de informação sobre o mundo. No aspecto sociocultural, vivemos em um mundo onde as informações são transmitidas principalmente de formas visuais, onde as tecnologias apoiam e incentivam a comunicação. (ARCAVI, 2003)

> Os meios de comunicação exploram as imagens, seja através dos livros, revistas, vídeos, filmes, fotografias, dentre outras. A Educação tem explorado estes novos meios, tanto porque está em concordância com a receptividade social de imagens quanto para favorecer sua linguagem expressiva e comunicativa. (MACHADO, 2008, p.103)

Dentre as potencialidades cognitivas da imagem, Machado (2008) destaca que as imagens provocam processos mentais como abstrações, associações e articulações, dessa forma, propiciando a descoberta. Para essa autora, o pensamento matemático está frequentemente associado a imagens.

> A imagem na qual a matemática está interessada vai além de uma simples ilustração: são as visualizações matemáticas, ou seja, são imagens que, por si mesmas, permitem a compreensão de uma determinada propriedade. (MACHADO, 2008, p. 104)

Gusmán (2002) apresenta em seu trabalho a influência da visualização no desenvolvimento da Matemática e de seu ensino. Em especial, discute o papel da visualização no ensino da Análise Matemática. Para esse autor, as ideias e os conceitos matemáticos possuem grande riqueza de relações visuais que são intuitivamente representáveis de diversas maneiras, dessa forma favorecendo sua manipulação na resolução de problemas ou na pesquisa. A visualização aparece de modo natural no nascimento do pensamento matemático, bem como na descoberta de novas relações entre os objetos matemáticos. Assim, “o fato de que a visualização é um aspecto muito importante da matemática é algo bastante natural se temos em conta o sentido da atividade matemática e da estrutura da mente humana"[14]. (GUSMÁN, 2002, p. 2)

Para Gusmán (2002), a visualização ou até mesmo a "visão" no seu sentido fisiológico não é um processo que envolve apenas o processo ótico. É uma atividade muito mais complexa que implica, de forma importante, a atividade de nosso cérebro. Nesse sentido, a visualização "não é uma visão imediata das relações, mas sim uma interpretação do que é apresentado à nossa observação que só podemos fazer quando aprendemos a ler adequadamente o tipo de comunicação que ela nos oferece[15]". (GUSMÁN, 2002, p. 3)

Frota (2013) também destaca a importância da visualização tanto para o desenvolvimento da Matemática como para a Educação Matemática. Refere-se à visualização como um processo de interpretar e criar imagens para comunicar ideias usando diferentes formas para expressar essas ideias.

As estratégias com foco na visualização são favorecidas com o uso das tecnologias digitais, sendo esta o principal meio de *feedback* fornecido pelos computadores (BORBA e VILARREAL, 2005). Mas para Frota (2013) também podem ser utilizadas em sala de aula sem os recursos computacionais.

> Estratégias com foco na visualização podem ser desenvolvidas na Sala de Aula, de forma que favoreça o entendimento de conceitos de cálculo, sem o uso de recursos computacionais, utilizando as chamadas tecnologias de papel e lápis. (FROTA, 2013, p. 64)

Borba e Villarreal (2005), citando Zimmermann e Cunningham (1991), apontam que a visualização em matemática é um processo de formação de imagens (mentalmente, ou com papel e lápis, ou com o auxílio

[14] *The fact that visualization is a very important aspect of mathematics is something quite natural if we have into account the meaning of the mathematical activity and the structure of the human mind.*

[15] *Visualization is therefore not an immediate vision of the relationships, but rather an interpretation of what is presented to our contemplation that we can only do when we have learned to appropriately read the type of communication it offers us.*

da tecnologia) e defendem utilizá-la com o objetivo de obter-se uma melhor compreensão, estimulando o processo de descoberta matemática.

Consideramos que a visualização associada às tecnologias digitais proporciona novos cenários para a exploração e a investigação matemática, tornando-se um importante elo entre o estudante e o objeto em estudo.

Para Kawasaki (2008), uma das vantagens de incorporar as tecnologias computacionais nos processos de ensino e aprendizagem é a possibilidade de visualizar e manipular ideias matemáticas, articulando diferentes tipos de representações dos objetos matemáticos.

> Parece haver consenso entre educadores matemáticos sobre o valor pedagógico da visualização no ensinar, no aprender e, até mesmo, no "fazer" matemática. Dessa forma, recursos visuais (não necessariamente os computacionais) sempre foram utilizados por professores, para introduzir ideias matemáticas abstratas e complexas. No caso do ensino de Cálculo, alguns educadores exaltam, no uso do computador, a possibilidade de visualizar e alterar uma representação gráfica, simultânea e continuamente articulando-a, de forma dinâmica, a suas representações numérica e algébrica. (KAWASAKI, 2008, p. 43)

As possibilidades de visualização potencializadas pelos computadores e a sua relação com a construção de conceitos matemáticos também são destacadas por Machado (2008):

> A visualização matemática, através da tela do computador, dá possibilidade de se elaborar um conjunto de argumentos (conjecturas) e ainda utilizá-los para resolver problemas, permitindo aos estudantes construir e relacionar as várias representações da informação e construir os conceitos matemáticos. (MACHADO, 2008, p. 107)

A despeito da reconhecida importância da visualização para compreensão e geração de ideias matemáticas, nem sempre as argumentações por meio de imagens são aceitas como válidas. Villarreal (1999) afirma que, em uma ecologia cognitiva dominada pela escrita, uma demonstração matemática, baseada em um gráfico ou gerada com o auxílio do computador, não é aceita como rigorosa. No entanto, ganha espaço com as tecnologias digitais.

> Os estilos de saber, característicos da cultura informática, podem ser condenados ou ignorados ou ser percebidos, por não satisfazerem os critérios e definições tradicionais advindos da civilização da escrita. No entanto, a imagem é destacada como um ponto de apoio fundamental das novas tecnologias intelectuais, das quais o computador ocupa lugar central. Fazendo parte de uma nova ecologia cognitiva, a abordagem visual de uma questão matemática pode ser reconhecida como sendo característica de um novo estilo de conhecimento. (VILLARREAL, 1999, p. 333)

> Por exemplo, a possibilidade de ver os efeitos de alteração de um parâmetro em uma equação pode contribuir para a geração de novas conjecturas. Este tipo de utilização do computador, na aquisição e processamento de informações, pode transformar o raciocínio matemático.[16] (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 87)

Uma das ideias associadas à visualização é a que considera que o ato de visualização pode acontecer em duas vias: uma conexão entre uma construção interna (mente) e algo em que o processo é adquirido através dos sentidos e, analogamente, pode consistir na construção em uma mídia externa, como o papel ou a tela do computador. No constructo dos seres-humanos-com-mídias, não deve existir essa dicotomia. A visualização é um processo de mão dupla, estando as representações "internas" e "externas" estreitamente associadas.

> [...] se adotarmos a noção de seres-humanos-com-mídia, vamos nos distinguir daqueles que atribuem um papel secundário para as diferentes tecnologias de inteligência, bem como aqueles que sugerem que visualização seja interna ou externa. Ao considerarmos a unidade humanos-com-mídia,

---

[16] *For example, the possibility of seeing the effects of changing a parameter in an equation may contribute to the generation of new conjectures. This kind of use of the computer, in the acquisition and processing of information, may transform mathematical reasoning.*

> já estabelecemos o papel central da mídia, uma vez que diferentes meios de comunicação como a oralidade, escrita e computadores reorganizam nosso pensamento.[17] (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 98)

Para Borba e Villarreal (2005), a tecnologia computacional enfatiza a componente visual da matemática. Dessa forma, "o processo de visualização atinge uma nova dimensão quando se considera o ambiente computacional de aprendizagem como parte de um pensamento coletivo, onde estudantes, professor-pesquisador, mídia e conteúdos matemáticos residem juntos"[18]. (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 96)

Concordamos com Borba e Villarreal (2005, p. 96) quando destacam o importante papel da visualização para a Matemática e para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Os autores enumeram os seguintes argumentos a favor da visualização, considerando possibilidades decorrentes das tecnologias:

- A visualização constitui uma forma alternativa de acesso ao conhecimento matemático.
- A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações e a representação visual pode transformar o conhecimento em si.
- A visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas.
- A tecnologia, com suas poderosas interfaces visuais, está presente nas escolas, e sua utilização para o ensino e a aprendizagem da matemática requer compreensão dos processos visuais.
- Se o conteúdo da própria matemática pode mudar devido aos

---

[17] *If we adopt the notion of humans-with-media, we will be distinguishing ourselves from those who attribute a secondary role to different technologies of intelligence as well as those who suggest that visualization is thinking either internal or external. As we consider the humans-with-media unit, we already establish the central role of the medium, since different media like orality, writing and computers reorganize our thinking.*

[18] *The visualization process reaches a new dimension if one considers the computational learning environment as a particular thinking collective, where students, teacher/researcher, media and mathematical contents reside together.*

computadores, como proposto por alguns matemáticos, é claro, nesse ponto, que a matemática nas escolas passará por, pelo menos, algum tipo de mudança.

• Embora a prova seja vista como o caminho para a verdade oficial na matemática acadêmica, ela não deve necessariamente ser transposta para a matemática na sala de aula em todos os níveis escolares.

Nesta pesquisa, destacamos a importância da visualização para a exploração dos conceitos matemáticos relativos a funções de duas variáveis, assim como as possibilidades de visualização no coletivo seres-humanos-com-mídias, em especial com o uso do *software* MAXIMA. Na concepção e no desenvolvimento das atividades, foram consideradas as potencialidades do *software* para exploração de conceitos matemáticos por meio de imagens. Buscamos criar ambientes nos quais não apenas mostramos imagens, mas sim estimulamos a experimentação e a elaboração de conjecturas a partir de imagens produzidas com uso do *software*.

No capítulo a seguir, apresentaremos os caminhos e as opções metodológicas da pesquisa realizada.

CAPÍTULO 3

OS CAMINHOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo, descreveremos as opções metodológicas adotadas no desenvolvimento desta pesquisa. Descreveremos o contexto da pesquisa, apresentaremos e justificaremos as escolhas metodológicas, a concepção das atividades e o seu desenvolvimento.

3.1 A metodologia da pesquisa

Escolhemos a metodologia qualitativa para o desenvolvimento desta pesquisa. Essa opção justifica-se pelas características do trabalho realizado. Na pesquisa qualitativa, prevalecem: a busca da compreensão, a descrição e a interpretação de fenômenos sociais, nos quais o objeto de estudo refere-se aos produtos da mente humana. Esse aspecto converge para o objetivo desta pesquisa que envolve a identificação e a descrição de situações nas quais houve produção de conhecimento matemático acerca de funções de várias variáveis, nos coletivos de seres-humanos-com-mídias, oportunizados pelas atividades desenvolvidas.

"A tarefa do pesquisador nas ciências sociais não é descobrir leis, mas engajar-se numa compreensão interpretativa das mentes daqueles que são parte da pesquisa" (SANTOS FILHO e GAMBOA, 2009, p. 27). Ao contrário da pesquisa quantitativa, que se caracteriza por investigar por meio de testes de hipóteses e generalização obtida através de análise quantitativa dos dados coletados, a pesquisa qualitativa responde a questões em um nível de realidade que não pode ou não deveria ser quantificado. (MINAYO, 1993, p.21)

> O ser humano se distingue não só por agir, mas por pensar sobre o que faz e por interpretar suas ações dentro e

> a partir da realidade vivida e partilhada com seus semelhantes. O universo da produção humana que pode ser resumido no mundo das relações, das representações e da intencionalidade e é objeto da pesquisa qualitativa dificilmente pode ser traduzido em números e indicadores quantitativos. (MINAYO, 1993, p. 21)

Uma das características da pesquisa qualitativa do campo da educação é o fato de que o pesquisador imerge-se no contexto da pesquisa. Assim, existe uma relação próxima entre sujeito – objeto – pesquisador, tornando o pesquisador ao mesmo tempo sujeito e objeto de suas próprias pesquisas.

> O valor-relevância coloca o pesquisador numa relação íntima com o mundo que é objeto da investigação. Como seres humanos que pesquisam os significados das ações sociais de outros seres humanos, os pesquisadores são ao mesmo tempo sujeito e objeto de suas próprias pesquisas. (SANTOS FILHO e GAMBOA, 2009, p. 31)

Isso de fato ocorreu nesta pesquisa, uma vez que as atividades objeto do estudo foram desenvolvidas pelo pesquisador em sua própria sala de aula, tendo assim uma participação ativa no seu desenvolvimento, uma vez que conduziu as atividades também como professor.

Para Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados de forma direta entre o pesquisador e a situação estudada, priorizando em retratar a perspectiva dos participantes e enfatizando o processo em relação ao produto. Os caminhos escolhidos para o desenvolvimento desta pesquisa estão de acordo com as ideias citadas acima. Para explicitar essa concordância, tomamos as características da pesquisa qualitativa indicadas pelos autores e discorremos sobre como elas se adequam às nossas opções metodológicas:

I) A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento: o desenvolvimento das atividades de campo e a coleta dos dados desta pesquisa foram realizados no ambiente natural (sala de aula e laboratório de informática) dos estudantes, tendo o pesquisador o duplo papel de professor-pesquisador em contato constante com os sujeitos.

II) Os dados são predominantemente descritivos: no caso de nossa pesquisa, utilizamos os relatórios produzidos pelos estudantes durante a realização das atividades, a avaliação de conteúdos aplicada pelo professor e as anotações do caderno de campo do pesquisador. Por meio desses instrumentos, pudemos descrever, de forma detalhada, como as atividades foram realizadas em sala de aula e como os estudantes expressaram suas ideias acerca dos temas estudados.

III) A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto: considerando o principal referencial teórico que norteia esta pesquisa, os seres-humanos-com-mídias, o conhecimento é sempre produzido em presença de determinada mídia. Diferentemente da perspectiva do professor, na qual muitas vezes se atribui especial importância ao resultado final da aprendizagem de determinado conceito, demonstrada através de provas, nesta pesquisa tem especial importância o processo de produção do conhecimento acerca de funções de várias variáveis no coletivo formado pelos seres-humanos-com-mídias.

IV) O significado é de grande importância para o pesquisador: na pesquisa qualitativa existe uma tentativa de capturar a perspectiva dos sujeitos, considerando seus diferentes pontos de vista. Nesta pesquisa, foi de grande importância a forma como os sujeitos se expressavam em seus relatórios e mesmo oralmente, oportunizando ao pesquisador observar aspectos que pudessem identificar o pensamento dos sujeitos acerca dos temas abordados nas atividades.

V) A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo: não houve na pesquisa o interesse em recolher dados para confirmar hipóteses construídas previamente. A análise buscou compreender se, e de que forma, foram produzidos conhecimentos matemáticos no coletivo seres-humanos-com-mídias.

Segundo Ludke e André (2013), na pesquisa qualitativa o papel do pesquisador é de servir como veículo ativo entre o conhecimento construído na área e as novas evidências que serão estabelecidas a partir da pesquisa, sendo as interpretações influenciadas pela subjetividade do pesquisador. Dessa forma, as conclusões que apresentamos decorrem de nossas interpretações acerca dos resultados que pudemos identificar, considerando os referenciais que escolhemos.

3.2 O contexto e os participantes da pesquisa

A pesquisa de campo foi desenvolvida no primeiro semestre de 2013 em uma turma da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III do curso de Engenharia de Produção em uma instituição de ensino superior privada, localizada no interior de Minas Gerais. Essa turma foi escolhida pelo motivo de o pesquisador ser o professor regente. Dessa forma, ele atuou como professor e como pesquisador no desenvolvimento das atividades.

A disciplina Cálculo Diferencial e Integral III se insere no terceiro período na matriz curricular do curso citado, com uma carga horária de 80 horas, distribuídas em 4 horas/aula semanais. No semestre em questão, as aulas aconteceram desta forma: duas aulas na segunda-feira das 19h às 20h40 e duas na quarta-feira, das 20h50 às 22h30. Além das aulas regulares, houve 14 horas para atividades complementares extraclasses.

A ementa da disciplina contempla o cálculo de funções de mais de uma variável, derivadas direcionais, gradiente, integração múltipla e introdução ao cálculo de campos vetoriais. A disciplina utiliza as seguintes referências bibliográficas básicas:

- STEWART, J. *Cálculo*. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2006. v. 2.
- LARSON, R. E; EDWARDS, B. H; HOSTETLER, R. P. *Cálculo*. 8. ed. São Paulo: Mc Graw-Hill, 2006. v. 2.
- FLEMMING, D. M.; GONCALVES, M. B. *Cálculo B*: funções de várias variáveis, integrais duplas e triplas. São Paulo: Makron Books, 1999.

Participaram dessa pesquisa 43 estudantes, sendo que somente dois deles cursavam a disciplina pela segunda vez. Essa turma possuía um estudante com 46 anos e os demais com idades variando entre 19 a 34 anos.

O curso no qual a disciplina se insere é oferecido no período noturno, pois todos os estudantes trabalhavam durante o dia. Como a instituição de ensino está localizada em uma cidade- polo de uma microrregião composta por 23 municípios, a maioria dos estudantes trabalhava em grandes empresas (principalmente siderúrgicas e de mineração) de cidades vizinhas. Assim, eles despendiam boa parte do seu tempo diário com locomoção para o trabalho e para a faculdade.

3.3 Retomando a questão de investigação e os objetivos

Esta pesquisa tem o propósito de investigar a produção do conhecimento acerca de funções de duas variáveis, num coletivo de seres-humanos-com-mídias, tendo como atores o *software* MAXIMA e os alunos em grupos, interagindo com o professor-pesquisador.

Em um primeiro momento, pensamos em restringir este trabalho a apenas um tópico específico relacionado ao cálculo de várias variáveis. Posteriormente, tendo avaliado as possibilidades e limitações do *software* MAXIMA, bem como o programa da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III no âmbito da qual as atividades seriam realizadas, optamos por desenvolver atividades exploratórias relativas a funções de duas variáveis, desde a introdução do conceito até derivadas parciais e aplicações. Parte das atividades foi desenvolvida em ambientes informatizados e outra parte em aulas usando a oralidade e a escrita.

Definimos nossa questão de investigação: *Que ideias matemáticas acerca de funções de duas variáveis são produzidas em um coletivo de seres-humanos-com-mídias?*

Para responder a essa questão, desenvolvemos os seguintes procedimentos metodológicos:

- Estudo bibliográfico referente ao ensino de cálculo, educação matemática no ensino superior, cálculo de funções de várias variáveis e tecnologias digitais na educação matemática. Com esse propósito, foram realizadas pesquisas no banco de teses da CAPES e em publicações na área de educação.
- Identificação de possibilidades e limitações do *software* MAXIMA.
- Concepção de atividades tendo como parâmetro para a análise o constructo teórico seres-humanos-com-mídia.
- Aplicação de questionários aos sujeitos participantes.
- Descrição das atividades, questionários e avaliações realizados pelos estudantes durante a pesquisa.
- Análise dos relatórios produzidos pelos estudantes durante a realização das atividades.
- Análise dos questionários e da primeira avaliação produzida pelos estudantes.

3.4 O software MAXIMA[19]

Considerando os diversos *softwares* matemáticos disponíveis, optamos pela utilização do MAXIMA em conjunto com outras mídias (como a oralidade e escrita). Entendemos que o coletivo formado pelas diferentes mídias pode favorecer a produção do conhecimento. As razões pela escolha desse *software* serão descritas a seguir.

O MAXIMA é um sistema de computação algébrica (CAS[20]) originado do *Macsyma* que foi desenvolvido no MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) nos anos de 1968 a 1982, como parte do Projecto MAC (*Machine Aided Cognition*). Trata-se de um *software* livre de licença GNU *General Public License* (GPL), disponível para diversos sistemas operacionais como *Windows* e *Linux*. Dessa forma, é acessível à comunidade acadêmica.

[19] Disponível em http://maxima.sourceforge.net/.

[20] *Computer Algebra System*.

Sendo um *software* do tipo CAS, viabiliza o tratamento simbólico, o que possibilita obter resultados para boa parte dos conteúdos usualmente trabalhados nas disciplinas de Cálculo, como limites, derivadas e integrais de funções reais de uma ou mais variáveis.

Além disso, possibilita abordagens numéricas e gráficas. No caso específico de funções de duas variáveis, que é o interesse desta pesquisa, além dos cálculos numéricos e algébricos, é possível esboçar e manipular gráficos em três dimensões, com diferentes possibilidades de visualização.

O MAXIMA possui duas interfaces: wxMAXIMA e xMAXIMA. Por meio das duas interfaces, é possível obter os mesmos resultados em termos de cálculos e gráficos. Porém a wxMAXIMA é mais interativa com o usuário e possui uma interface gráfica que permite o acesso às funções por meio de menus e caixas de diálogos. Como essa interface é semelhante à de outros *softwares* que estão presentes no cotidiano dos estudantes, esse aspecto tornou-se um facilitador na sua utilização durante a realização das atividades desta pesquisa. Na Figura 2, a tela do wxMAXIMA, abre a janela para a construção de um gráfico de uma função de duas variáveis, no caso a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Para essa construção, utilizou-se a sequência no menu gráfico – Gráfico 3D.

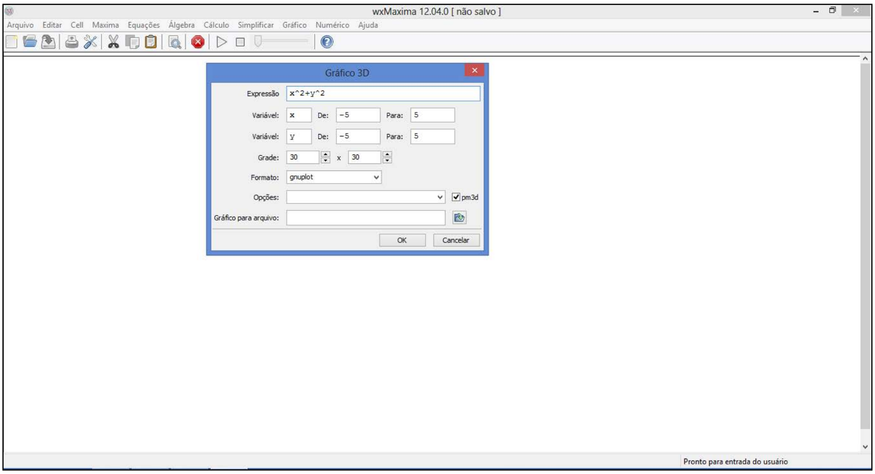


FIGURA 2 - Tela da interface da versão wxMAXIMA
Fonte: Dados do pesquisador

A interface XMAXIMA não possui janelas gráficas. Portanto, todas as atividades desenvolvidas devem ser realizadas por meio de linhas de comando. Devido a essa característica, consideramos que a sua utilização ocasionaria dificuldades para o desenvolvimento das atividades. Para exemplificar, mostramos, na Figura 3, a tela da interface xMAXIMA com a construção do gráfico da função $f(x,y)=x^2+y^2$ com a respectiva linha de comando. Assim, podemos comparar as diferenças na utilização das duas versões do MAXIMA para a construção de um mesmo objeto.

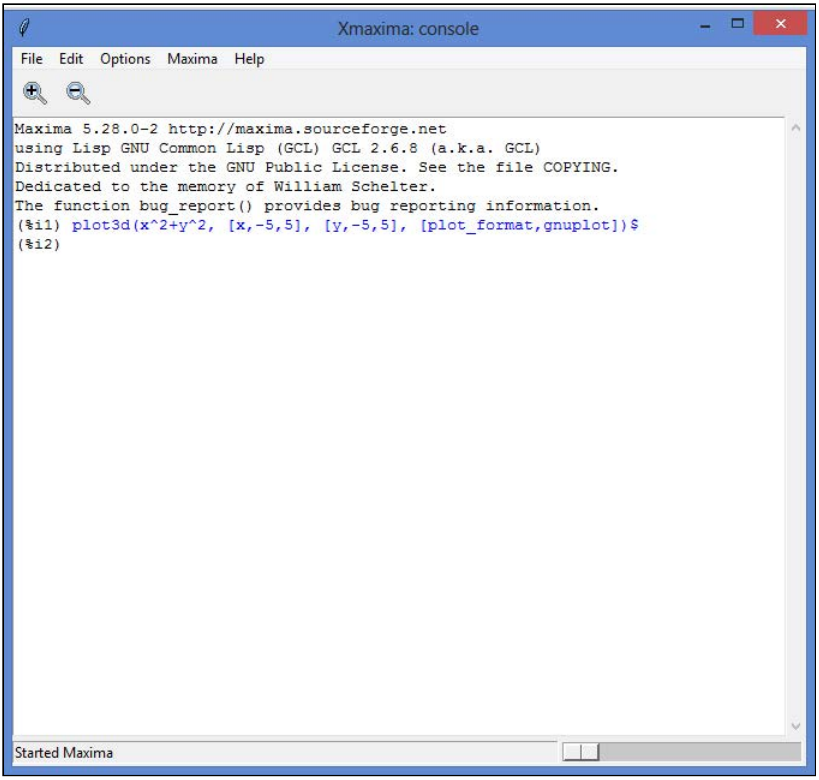


FIGURA 3 - Tela da interface xMAXIMA
Fonte: Dados do pesquisador

Para essa pesquisa, optamos pelo uso da interface wxMAXIMA, na versão do 5.28 do MAXIMA, pois consideramos que o aluno teria mais facilidade para utilização, o que poderia facilitar a manipulação e a exploração dos conceitos matemáticos por meio das atividades propostas, permitindo ao aluno transitar com objetos construídos nas formas algébrica, numérica e gráfica.

Antes de iniciar as atividades relativas a funções de duas variáveis foi feita uma atividade preliminar utilizando o MAXIMA, com o objetivo de apresentar o *software* aos alunos e trabalhar alguns dos comandos básicos que seriam utilizados nas atividades da pesquisa.

3.5 A concepção e o desenvolvimento das atividades

As atividades foram concebidas com o propósito de construir ambientes nos quais os estudantes, utilizando diferentes mídias, interagindo com os colegas e com o professor, pudessem produzir algum conhecimento matemático acerca de funções de várias variáveis. De modo geral, as atividades tiveram caráter exploratório. Os estudantes foram estimulados a explorar os conceitos matemáticos antes que eles fossem definidos formalmente. Para tanto, tinham possibilidade de utilizar diferentes mídias, incluindo o *software* MAXIMA. Os estudantes também foram orientados a registrar suas observações, pensamentos, discussões com os colegas e também a elaborar conjecturas sobre os assuntos explorados.

Para a construção das atividades com uso de *software*, consideramos as possibilidades e limitações do MAXIMA. Por esse motivo, elaboramos atividades aproveitando os recursos que o *software* proporciona, estimulando a construção e a manipulação das imagens, a variação de parâmetros das funções, os cálculos numéricos e algébricos, dentre outros. Além dos aspectos visuais, na concepção das atividades, consideramos também elementos de transição de conceitos do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis. Abrimos espaços para retomada de conceitos relativos às funções de uma variável sempre que julgamos serem importantes para a abordagem dos correspondentes conceitos para duas variáveis.

Consideramos em nossa análise quatro grupos de atividades. Dentre elas, há aquelas que foram feitas em ambiente computacional (com uso do *software* MAXIMA) e as realizadas em sala de aula com recursos de outras mídias (aulas dialogadas com uso da oralidade e da escrita).

No Quadro 1 a seguir, apresentamos as atividades desenvolvidas.

QUADRO 1 – Temas das atividades realizadas

Primeiro grupo de atividades	Gráfico e domínio de uma função de duas variáveis
Segundo grupo de atividades	Curvas de nível de uma função de duas variáveis
Terceiro grupo de atividades	Conceito e interpretação geométrica das derivadas parciais de uma função de duas variáveis
Quarto grupo de atividades	Extremos de uma função de duas variáveis

Fonte: Dados do pesquisador

As atividades foram realizadas durante as aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral III, abordando temas relativos ao cálculo de duas variáveis, e aconteceram de acordo com o cronograma da disciplina em questão. Foram realizadas intercalando momentos em ambientes informatizados e outros fora deles.

Os quatro grupos de atividades considerados na análise foram realizados em dezoito encontros, considerando aqui tanto aqueles nos quais se fez uso de tecnologias digitais, bem como as discussões e as sistematizações de conteúdos em sala de aula, tendo como base as atividades desenvolvidas com a utilização do *software* MAXIMA, ou ainda os encontros nos quais foram retomados os conceitos base do cálculo de uma variável, que seriam usados para a transição para o cálculo de duas variáveis.

Para a realização das atividades, os estudantes foram organizados em pequenos grupos de acordo com seus interesses e afinidades, sem a interferência do pesquisador na sua formação. Optamos por desenvolver as atividades em grupos, pois julgamos que essa constituição poderia favorecer as discussões entre os estudantes e a produção do conhecimento.

No Apêndice A (p. 157), situamos a ordem cronológica do desenvolvimento das atividades no contexto da disciplina Cálculo Diferencial e Integral III, enquanto que no Quadro 2, apresentamos a sequência de realização das atividades consideradas na pesquisa.

QUADRO 2 – Sequência de realização das atividades consideradas na pesquisa

DATA	TEMA	AMBIENTE
18/02/2013	Primeiro grupo de atividades: gráfico de uma função de duas variáveis e seu domínio	Laboratório de Informática
20/02/2013	Primeiro grupo de atividades: gráfico de uma função de duas variáveis e seu domínio	Laboratório de Informática
25/02/2013	Discussão teórica sobre gráfico e domínio	Sala de Aula (com uso de *data-show*)
27/02/2013	Segundo grupo de atividades: curvas de nível de uma função de duas variáveis	Laboratório de Informática
04/03/2013	Discussão teórica sobre curvas de nível	Sala de Aula (com uso de *data-show*)
06/03/2013	Segundo grupo de atividades: curvas de nível de uma função de duas variáveis	Laboratório de Informática
11/03/2013	Segundo grupo de atividades: curvas de nível de uma função de duas variáveis	Laboratório de Informática
18/03/2013	Discussão teórica sobre curvas de nível	Sala de Aula (com uso de *data-show*)
20/03/2013	Primeira avaliação	Sala de Aula
01/04/2013	Derivadas parciais de primeira ordem	Sala de Aula
10/04/2013	Terceiro grupo de atividades: interpretação geométrica das derivadas parciais de uma função de duas variáveis	Laboratório de Informática

15/04/2013	Discussão teórica sobre interpretação geométrica das derivadas parciais	Sala de Aula (com uso de *data-show*)
27/05/2013	Quarto grupo de atividades: extremos de uma função de duas variáveis	Sala de Aula (com uso dos *notebooks* dos estudantes)
29/05/2013	Discussão teórica sobre extremos de funções	Sala de Aula (com uso de *data-show*)
03/06/2013	Quarto grupo de atividades: extremos de uma função de duas variáveis	Sala de Aula (com uso dos *notebooks* dos estudantes)
05/06/2013	Quarto grupo de atividades: extremos de uma função de duas variáveis	Sala de Aula (com uso dos *notebooks* dos estudantes)
10/06/2013	Discussão teórica sobre extremos de funções	Sala de Aula (com uso de *data-show*)
12/06/2013	Aplicação do questionário, finalizando as atividades da pesquisa	Sala de Aula

Fonte: Dados do pesquisador

3.6. A coleta dos dados

Na primeira semana do ano letivo, foram expostos a todos os estudantes os objetivos da pesquisa e a dinâmica das atividades. Após os esclarecimentos de todas as dúvidas dos estudantes quanto à pesquisa, eles autorizaram formalmente a sua participação na pesquisa e a coleta de dados decorrentes de sua produção acadêmica durante as aulas e nas avaliações. Utilizamos os seguintes instrumentos para coleta dos dados:

- *Registros das resoluções e comentários das atividades realizadas pelos alunos:* Esses registros foram construídos em mídia digital (por meio de um arquivo em um *software* editor de texto[21]), onde os alunos

[21] O editor de texto disponível era o *Libre Office Writer*.

foram orientados a registrarem além da resolução das questões, todas as suas observações, reflexões, dúvidas, ideias, gráficos e tudo o que julgassem importantes. Esses registros foram enviados para o professor-pesquisador através de *e-mail*, ao término de cada aula. Também foram considerados os registros na mídia lápis-papel utilizados por alguns grupos em algumas atividades. Como as atividades foram realizadas em grupos, os registros foram identificados por letras e números, de "Grupo D1" a "Grupo D15".

• *Avaliações realizadas pelos alunos*: Essas avaliações aconteceram de acordo com o cronograma da disciplina. Para esta pesquisa, trazemos dados referentes apenas à primeira avaliação. Elas foram realizadas de forma individual na mídia lápis-papel. Esta forma de avaliação foi motivada pelo fato de que o desenvolvimento de outras maneiras, como em conjunto com a mídia informática, não foi possível devido à indisponibilidade de recursos técnicos e humanos no dia da avaliação.

• *Questionários*: Dois questionários foram considerados na pesquisa: um questionário a respeito da primeira avaliação (APÊNDICE B) e outro aplicado após o término das atividades (APÊNDICE C). Os questionários foram respondidos individualmente. Foi deixada, a critério dos estudantes, a sua identificação ou não. Na descrição e análise desta pesquisa, os estudantes foram identificados de "Estudante A1" a "Estudante A43". Nesses questionários, foram propostas questões abertas, onde os estudantes tiveram a oportunidade de expressar suas opiniões e percepções, tanto a respeito de sua aprendizagem como dos recursos utilizados para desenvolvimento das atividades.

• *Anotações no caderno de campo do pesquisador:* Ao final de cada encontro, procuramos registrar o maior número de informações sobre o desenvolvimento das atividades. Nossos registros concentravam na dinâmica de desenvolvimento das atividades e nas dificuldades, erros, estratégias, reflexões e comentários dos estudantes.

Tínhamos a intenção de coletar dados por meio de gravações de áudio e vídeo. Fizemos isso na primeira atividade. No entanto, devido ao número de participantes e a disposição física dos computadores no laboratório de informática (Figura 4), os alunos ficavam muito próximos e a qualidade das gravações ficou comprometida. Diante do resultado não satisfatório das gravações no primeiro encontro, optamos por não realizar novas gravações nas atividades seguintes.

Também tentamos a utilização de um *software*[22] para a captura das telas do computador durante a realização das atividades. Mas essa prática foi abandonada porque o uso desse *software*, simultaneamente com o MAXIMA ocasionou uma instabilidade no funcionamento dos computadores, dessa forma, comprometendo o desenvolvimento das atividades.

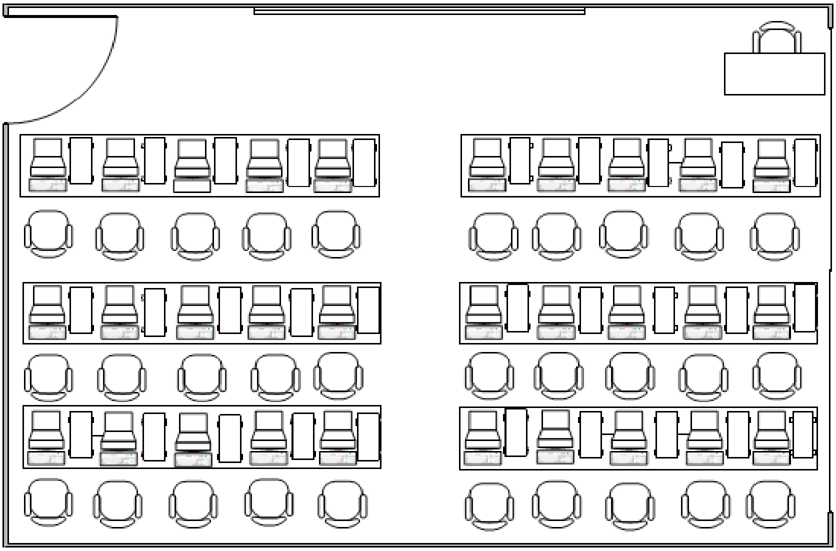


FIGURA 4 - Layout do laboratório utilizado durante a pesquisa
Fonte: Produção do pesquisador

[22] Para esse propósito, foi utilizado o *AutoScreenRecorder 3.1 Free*.

Consideramos que seriam muito importantes as gravações de áudio e vídeo, bem como a captura das telas dos computadores para identificar processos na produção das ideias matemáticas acerca de funções de várias variáveis. Mas devido à impossibilidade da obtenção de dados por esses recursos, procuramos os indícios da produção do conhecimento nos relatórios dos estudantes, comentários, na primeira avaliação, questionários e também por meio da observação do professor-pesquisador através dos registros em seu caderno de campo.

No próximo capítulo, apresentaremos a descrição e a análise das atividades realizadas.

CAPÍTULO 4

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos e analisamos as atividades realizadas nesta pesquisa. Apresentamos as atividades e os dados produzidos, na sequência em que foram desenvolvidas em sala de aula. Limitaremo-nos a falar sobre as atividades consideradas na análise dos dados da pesquisa, feitas também neste capítulo. Nessa análise, determinamos três eixos: visualização, transição do cálculo de uma para duas variáveis e o papel desempenhado pelas mídias no coletivo de seres-humanos-com-mídias. Esses eixos foram escolhidos tendo como base os referenciais teóricos apresentados nos capítulos dois e três e foram identificados a partir de um exame minucioso dos dados da pesquisa. É mister ressaltar que não os entendemos como eixos excludentes, pois há muita intersecção entre eles, ou seja, vários dos resultados observados se enquadram em mais de um deles. A análise será apresentada concomitantemente com a descrição das atividades, destacando, em cada uma delas, elementos de cada um dos eixos considerados, à medida que esses aparecem nas atividades.

4.1 O primeiro grupo de atividades: gráfico e domínio de uma função de duas variáveis

Esse grupo de atividades foi desenvolvido em três encontros de duas horas cada, sendo os dois primeiros em laboratório e o último em sala de aula. Teve como objetivo introduzir os conteúdos de gráfico e domínio de funções de duas variáveis a partir da exploração de imagens obtidas por meio do MAXIMA. Dessa forma, os conceitos matemáticos necessários foram trabalhados ao longo da atividade e sistematizados de modo teórico no terceiro encontro. Para exploração do tema no ambiente computacional, foi apresentado um roteiro (APÊNDICE D, p. 167) denominado “Gráfico de uma função de duas variáveis e seu domínio”. Foram propostas questões buscando a observação e a manipulação das imagens obtidas como gráfico da função e a relação deste com uma região do plano *xy* (obtida pela sua projeção no plano) que, posteriormente, seria identificada como o domínio da função.

A atividade foi realizada no início do semestre letivo de 2013. Muitos dos alunos não tinham estado presentes na primeira aula, acontecida na semana anterior, e não sabiam que seria necessário deslocamento para o laboratório. Isso ocasionou atraso dos alunos, consumindo parte do tempo previsto para a atividade. Esse problema foi quase totalmente resolvido nas aulas seguintes.

No início da aula, os estudantes foram orientados quanto ao procedimento das atividades. Foi disponibilizado a cada estudante um livreto, organizado por este pesquisador, no qual estavam disponíveis algumas funções e comandos básicos do MAXIMA, principalmente, aqueles que seriam utilizados durante as atividades. Juntamente a esse livreto, foi entregue o roteiro da atividade. Os estudantes foram orientados a registrarem, em um arquivo de texto, todas as suas observações, discussões, conclusões, conjecturas, ideias e os gráficos produzidos. Esse arquivo deveria ser enviado por *e-mail* ao professor ao final da aula. Foi disponibilizado a todos o editor de texto *LibreOffice Writer*. Muitos alunos não conheciam esse aplicativo, mas isso não gerou problemas, pois ele é similar ao *Microsoft Word,* conhecido por todos os estudantes.

Na primeira parte dessa atividade, foi solicitado aos alunos que esboçassem e explorassem o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ considerando diferentes intervalos de variação da variável x e da variável y, escolhendo a melhor forma de visualização do gráfico. Durante a execução desse item, os estudantes utilizaram alguns dos recursos gráficos do MAXIMA, como o **plot3d** e **gnuplot** (pacote gráfico mais avançado entre os disponíveis). Muitos dos estudantes nunca tinham construído um gráfico de uma função de duas variáveis e não tinham ideia de que esse gráfico era uma superfície no espaço tridimensional. Ficaram surpresos principalmente com os recursos de alterar os intervalos para a construção do gráfico e a possibilidade de movimentá-lo em qualquer direção.

As imagens e as conclusões dos grupos foram parecidas. Para exemplificar, apresentamos, na Figura 5, o gráfico elaborado pelo Grupo D3.

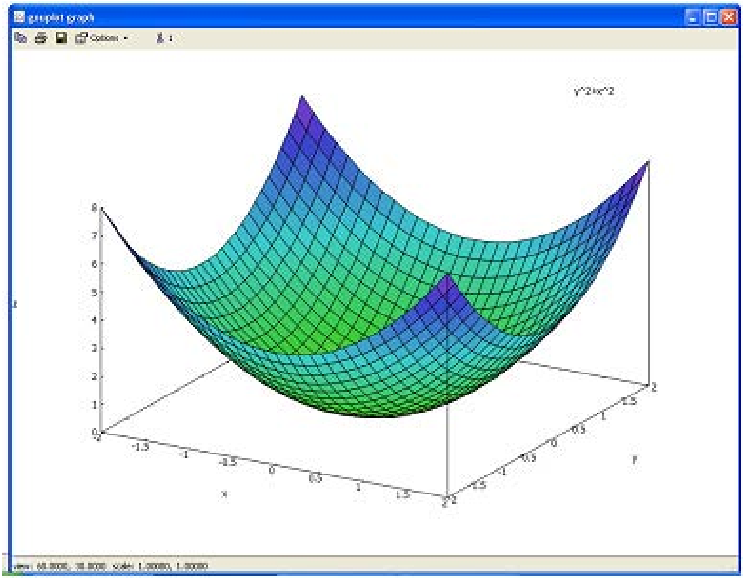


FIGURA 5 - Gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$ do Grupo D3

Fonte: Produção do Grupo D3

Após a construção do gráfico da Figura 5, o Grupo D3 registrou o seguinte comentário: "Constatamos que, por esse ângulo, o campo de visualização é melhor pelo fato de conseguirmos identificar os três eixos: X, Y e Z."

Pesquisas apontam a visualização como uma das características que são potencializadas quando utilizamos as tecnologias informáticas. Para Borba e Villarreal (2005, p. 96), "a visualização constitui uma forma alternativa de acesso ao conhecimento matemático". Os autores citados indicam que, ao se elaborarem atividades com uso da mídia informática, deve-se pensar em situações em que o uso da mídia realmente faça a diferença. No caso dos gráficos de funções de duas variáveis, isso fica muito evidente, uma vez que muitas das superfícies dificilmente poderiam ser exploradas sem esse recurso.

Para os integrantes do Grupo D8, a utilização do MAXIMA para a construção de um gráfico de uma função de duas variáveis é válida, pois relataram: “Observamos que os intervalos são visíveis e o gráfico em 3d fica disposto de uma maneira que não poderia ser feito manuscrito”.

Se, por um lado, a mídia abre possibilidades de visualização das superfícies; por outro, pode levar a interpretações precipitadas a respeito do gráfico por parte dos estudantes e isso deve ser devidamente trabalhado, corrigindo distorções.

Giraldo (2004) mostra-nos reflexões sobre a discrepância entre as representações computacionais e o objeto matemático representado. Para esse autor, os algoritmos de traçados de gráficos feitos por interpolação de conjuntos finitos de pontos podem produzir gráficos de funções erroneamente, de acordo com a janela gráfica utilizada. No caso da superfície em questão, alguns grupos tiveram dificuldade em entender que o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ é uma superfície infinita, uma vez que a imagem visualizada por meio do *software* apresenta uma superfície com contornos definidos. Mesmo aumentando as variações de x e de y para esboçar o gráfico, a visualização da superfície era a mesma, com contornos externos aparentemente delimitados. Essa aparente limitação é mostrada na Figura 6.

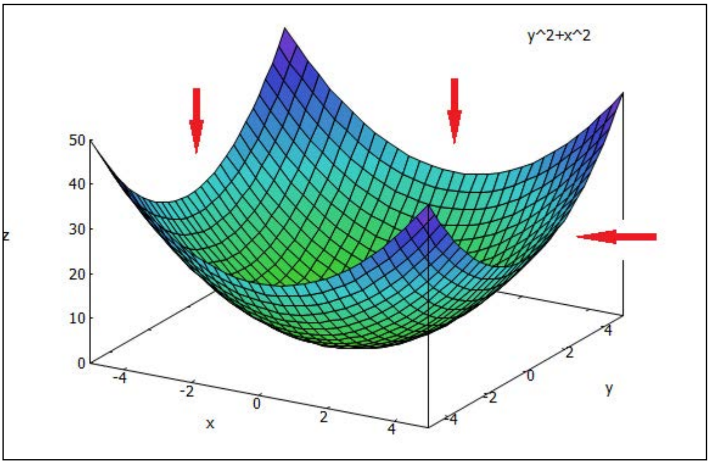


FIGURA 6 - Gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$ indicando aparente limitação

Fonte: Produção do pesquisador

Isso foi discutido com os estudantes, explorado na segunda e na terceira parte dessa atividade, na qual os estudantes trabalharam com outras funções de duas variáveis e também de modo teórico a partir da expressão da função. No caso da função acima, uma análise da expressão e da possibilidade de aumentarmos infinitamente os valores das variáveis *x* e *y* aumentando também infinitamente os valores correspondentes de $f(x, y)$, poderia produzir uma imagem do gráfico mais fiel à superfície do que a produzida pelo *software*. Na Figura 7, temos o exemplo de um esboço do gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ semelhante ao de gráficos construídos na mídia lápis-papel.

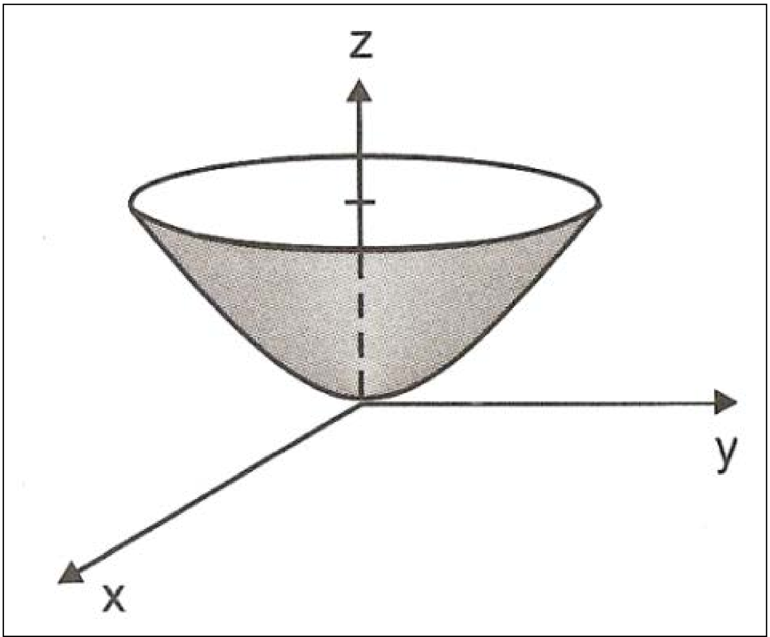


FIGURA 7 - Gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Fonte: Produção do pesquisador

De acordo com Giraldo (2004), o conceito de infinito está na base dos objetos de estudo do cálculo, e a ocorrência de erros resultantes dos processos de interpolação pode tornar as representações computacionais menos fiéis aos objetos representados.

Os alunos do Grupo D12, embora aparentemente tivessem compreendido esse tipo de limitação do *software* com relação às imagens obtidas, apontaram um ponto do gráfico (Figura 8) como extremo da função, o que nos indicou que efetivamente havia permanecido dúvida.

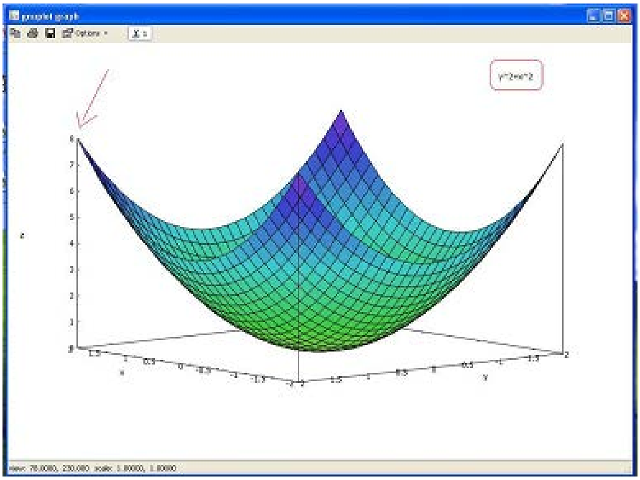


FIGURA 8 - Gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$ indicando o extremo

Fonte: Produção do Grupo D12

Percebida essa interpretação errônea, o assunto foi retomado no terceiro encontro no qual os aspectos teóricos foram sistematizados.

A segunda parte dessa atividade explorou o gráfico da função $g(x,y) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$ em diferentes intervalos centrados na origem. A escolha dessa função para essa atividade foi motivada pelo fato de que a visualização do gráfico de $g(x,y)$ se modifica com as alterações dos intervalos das variáveis *x* e *y*. Foi proposto aos estudantes que construíssem, com o auxílio do MAXIMA, os gráficos da função $g(x,y)$, utilizando os seguintes intervalos:

I. $-5 \leq x \leq 5$ e $-5 \leq y \leq 5$;

II. $-10 \leq x \leq 10$ e $-10 \leq y \leq 10$;

III. $-20 \leq x \leq 20$ e $-20 \leq y \leq 20$;

IV. $-30 \leq x \leq 30$ e $-30 \leq y \leq 30$.

Ainda foi proposta a seguinte questão: "Você observa alguma modificação na aparência da superfície obtida? Existe mais de um gráfico para a mesma função $g(x, y)$? Explique." Para exemplificar, apresentamos, na Figura 9, a sequência construída pelo Grupo D1 para a função $g(x, y)$.

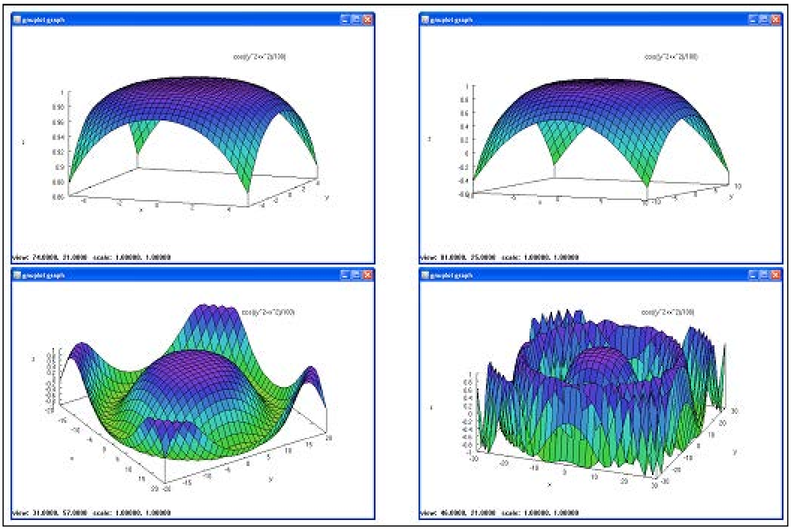


FIGURA 9 - Esboços do gráfico da função $g(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$
Fonte: Produção do Grupo D1

A possibilidade de variar os intervalos foi bastante explorada pelos estudantes. Ao observarem mudanças nas imagens obtidas, foram além dos intervalos sugeridos. Estimulados pela pergunta feita e analisando as imagens, os estudantes conjecturaram que uma função possui apenas um gráfico, mudando apenas a sua aparência de acordo com os intervalos de variação de x e y. Borba e Villarreal (2005, p. 87), citando autores como Devlin (1997) e Levy (1993), afirmam que

> O computador pode desempenhar um papel significativo no processo de raciocínio matemático. Por exemplo, a possibilidade de ver os efeitos da mudança de um parâmetro em uma equação pode contribuir para a geração de novas conjecturas. Este tipo de utilização do computador, na aquisição e processamento de informações, pode transformar o raciocínio matemático.[23] (BORBA e VILLARREAL, 2005, p. 87)

Nos relatos dos estudantes, vemos suas conjecturas a respeito das imagens obtidas com as modificações dos intervalos e do que efetivamente se caracteriza como gráfico da função estudada.

Assim se pronunciou o Grupo D8: "Observamos que, com o aumento dos intervalos, há mudança na visualização do gráfico apesar de a função ser a mesma. Houve mudança na visualização. O gráfico vai ser o mesmo, apesar de os valores dos intervalos serem diferentes."

Já o Grupo D9 afirmou: "Sim, observamos modificações na aparência do gráfico. O gráfico é o mesmo, é mudada só a sua 'aparência', quando mudamos o intervalo de x e y, a função continua a mesma."

Uma dificuldade detectada com relação ao *software* foi o fato de o MAXIMA trabalhar com apenas uma janela gráfica **gnuplot** de cada vez. Assim, os estudantes tiveram que utilizar várias seções do MAXIMA simultaneamente para observar e comparar os gráficos da função $g(x,y)$.

Tendo como referência as duas funções estudadas, o item c do roteiro perguntava: "É possível esboçar o gráfico da função para quaisquer valores de x e de y?". Essa pergunta tinha como objetivo trazer subsídios para a definição de domínio de funções de duas variáveis, que é apresentada na sequência, no próprio roteiro.

[23] *The computer can play a significant role in the mathematician's reasoning process. For example, the possibility of seeing the effects of changing a parameter in an equation may contribute to the generation of new conjectures. This kind of use of the computer, in the acquisition and processing of information, may transform mathematical reasoning.*

O Grupo D3 relatou: “Sim. Pelo fato de qualquer valor atribuído em *x* e *y*, temos condições de calcular.”

E o Grupo D8 corroborou o relato do Grupo D3: “Sim. É possível atribuir qualquer valor para *x* e *y*.”

No item **d** do roteiro, foi apresentada a definição do domínio de uma função de duas variáveis e foi solicitado aos estudantes que determinassem o domínio da função $g(x, y)$. Os alunos não se lembravam do conceito de domínio de funções de uma variável. Foi dado um espaço de tempo para discussões entre eles. Ao término das discussões, ficou a impressão de que os estudantes começaram a compreender o que seria o domínio de uma função. No entanto, tiveram dificuldade de perceber que as variáveis poderiam assumir qualquer valor no conjunto dos números reais. Alguns estudantes inicialmente não compreendiam como o domínio de $g(x, y)$ poderia ser um conjunto infinito, a exemplo do que já foi citado na descrição da primeira parte dessa atividade na qual alguns estudantes não conseguiram entender o gráfico de $f(x, y)$ como uma superfície infinita. Nesse momento, foi possível identificar dificuldades relativas a conceitos envolvendo “infinito”. Essa é uma das dificuldades apontadas na literatura para a transição da educação básica para a educação superior (REZENDE, 2003).

Os relatos a seguir referem-se às ideias dos grupos a respeito do domínio da função de $g(x, y)$. O Grupo D1 constatou que “Conforme evidenciado na letra c, o domínio é D = R.” E o Grupo D8 escreveu: “O domínio da função *g (x, y)* será os números reais”. E, por fim, o Grupo D10 assim se expressou: “O domínio é o resultado dos valores obtidos na função *x, y* pertencente ao conjunto dos números reais.” Interpretamos que, embora não tenham se expressado de forma correta dizendo que o domínio é o conjunto de todos os pontos $(x, y) \in R^2$, os estudantes compreenderam que as variáveis *x* e *y* podem assumir quaisquer valores reais.

Na primeira e na segunda partes dessa atividade, embora as duas funções tenham o mesmo domínio $\Re^2$, estas foram escolhidas de modo a chamar a atenção para o fato de que, para determinadas funções, um único intervalo de variação pode mostrar apenas parte do gráfico, não dando nenhuma ideia sobre a função de modo amplo.

Na terceira parte dessa atividade, os estudantes exploraram a função $h(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$. O roteiro foi construído buscando relacionar a definição de domínio apresentada (como o conjunto de pontos em que seja possível calcular a função) com a visualização da região plana obtida pela projeção do gráfico no plano xy. Diferentemente das funções estudadas anteriormente, o domínio dessa função é uma região limitada no plano. Inicialmente, foi feita uma exploração na qual os estudantes esboçaram o gráfico de $h(x,y)$, alterando os intervalos das variáveis X e Y. Foi perguntado aos estudantes: "O que acontece quando usamos intervalos de variação maiores?". Os alunos perceberam que a aparência do gráfico se modificava, porém a superfície continuava em uma região limitada.

Na Figura 10, estão os esboços do gráfico de $h(x,y)$ feitos pelo Grupo D5.

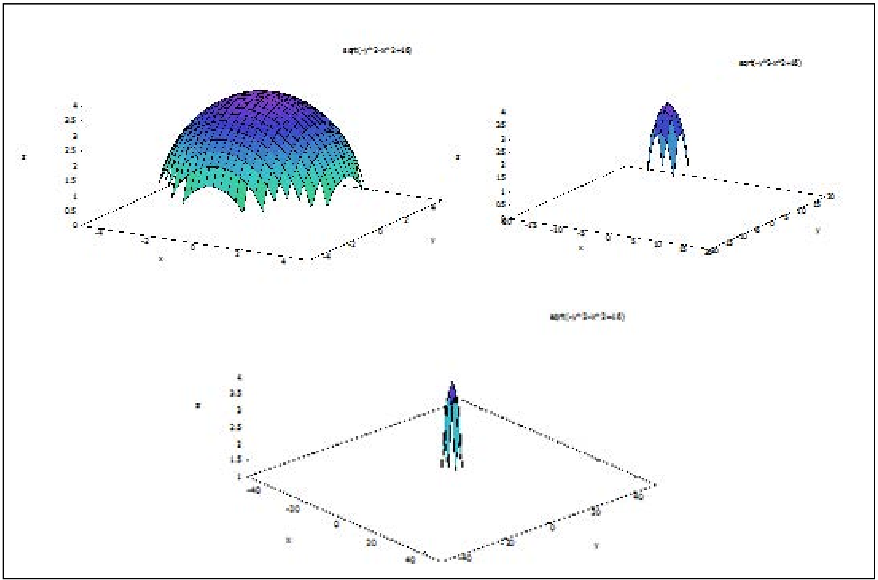


FIGURA 10 - Esboços do gráfico da função $h(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$
Fonte: Produção do Grupo D5

Com base nessas imagens, o Grupo D5 chegou à seguinte conclusão: "Quanto maior o intervalo, menor fica a visualização do gráfico, mas o domínio mantém sempre o mesmo: 4 e -4."

A resposta desse grupo evidencia a percepção de que a região é limitada, porém mostra a necessidade de ainda continuar explorando a situação para a identificação da região que efetivamente corresponde ao domínio da função, o que é feito nos demais itens da atividade.

No item **b** dessa parte da atividade, foi solicitado aos estudantes o cálculo dos valores de $h(2,2)$, $h(-1,2)$, $h(4,0)$ e $h(3,3)$. O objetivo desse item foi mostrar que, para a função $h(x,y)$, não é possível calcular os seus valores para qualquer valor de *x* e de *y*, estimulando assim reflexões acerca do que deve ser o domínio de uma função de duas variáveis.

Para o cálculo dos valores solicitados, alguns grupos utilizaram a mídia lápis-papel e outros os recursos do próprio MAXIMA, caracterizando, assim, uma interação entre diferentes mídias para a produção do conhecimento matemático. Na Figura 11, reproduzimos uma tela do MAXIMA na qual é possível identificar o processo utilizado pelo Grupo D12.

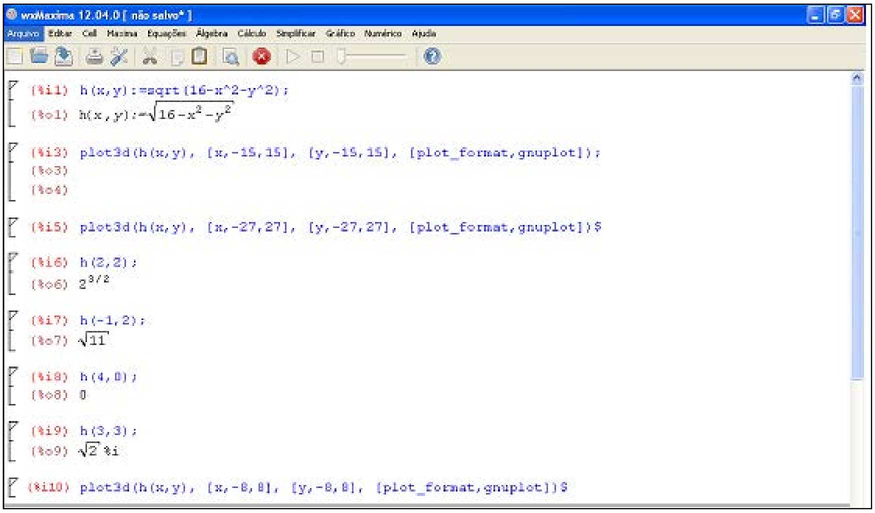


FIGURA 11 – Cálculos referentes à função $h(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$
Fonte: Produção do Grupo D12

É interessante mencionar as interações entre os estudantes comparando os resultados obtidos pelos que fizeram os cálculos de $h(3,3)$ usando a mídia lápis-papel e os que utilizaram o MAXIMA. A resposta $\sqrt{2}\%i$, apresentada na tela do MAXIMA (Figura 11), gerou dúvidas, principalmente, quando os estudantes compararam esse resultado com o obtido pelos grupos que utilizaram o ambiente lápis-papel, para os quais não era possível obter o valor de h(3,3). A liberdade de escolha do recurso a ser utilizado para os cálculos potencializou as discussões no coletivo. Na concepção de Borba e Villarreal (2005), as propostas educacionais devem considerar as mudanças na sala de aula que o computador encoraja.

> Mas, acreditamos que, se o computador faz parte de um coletivo de pensamento educacional, é necessário gerar propostas educacionais, considerando as formas de pensar, a organização do conhecimento, e as mudanças nas relações pessoais dentro da Sala de Aula que o computador encoraja.[24] (BORBA E VILLARREAL, 2005, p. 97)

Nesse momento, foram resgatados conhecimentos referentes ao conjunto dos números complexos. Também foi exposto aos estudantes que o MAXIMA estava apresentando todos os resultados dentro desse conjunto. No caso das funções reais de variáveis reais, não deve ser considerado o valor obtido no conjunto dos complexos, portanto o ponto (3,3) está fora do domínio da função.

Na sequência, foi sugerido aos estudantes que movimentassem o gráfico de $h(x,y)$ para visualizar a região para a qual não é possível calcular $h(x,y)$ (item **c**) e determinar a região do plano *xy* correspondente ao domínio da função $h(x,y)$, fazendo um esboço. Também foi sugerida a alteração dos valores da grade[25] para melhor visualização da região.

---

[24] *But, we believe that, if the computer integrates an educational thinking collective, it is necessary to generate educational proposals considering the ways of thinking, organization of knowledge, and the changes in the personal relations inside the classroom that the computer encourages.*

[25] *Grade é uma ferramenta do software MAXIMA que determina a quantidade de pontos a serem utilizados pelo mesmo na plotagem dos gráficos de uma função, por exemplo: 30x30, 100x100. Quanto maior a grade, melhor e mais precisa é a visualização.*

Na Figura 12, está a construção do gráfico de $h(x, y)$ feita pelo Grupo D10 utilizando uma grade 100x100. A utilização de valores altos para a grade mostrou-se eficaz quanto à qualidade dos gráficos gerados, melhorando principalmente a visualização deles. No caso da função $h(x, y)$, os estudantes observaram que, quanto maior a grade, a visualização do domínio mais se aproximava de maneira perfeita de uma circunferência. Mas o ponto negativo é que a utilização desses valores requer alto gasto de memória, considerando os diversos *softwares* e janelas abertas simultaneamente (Figura 12). Assim, dificultou a rotação dos gráficos para visualização do domínio, que ficou lenta e difícil de controlar.

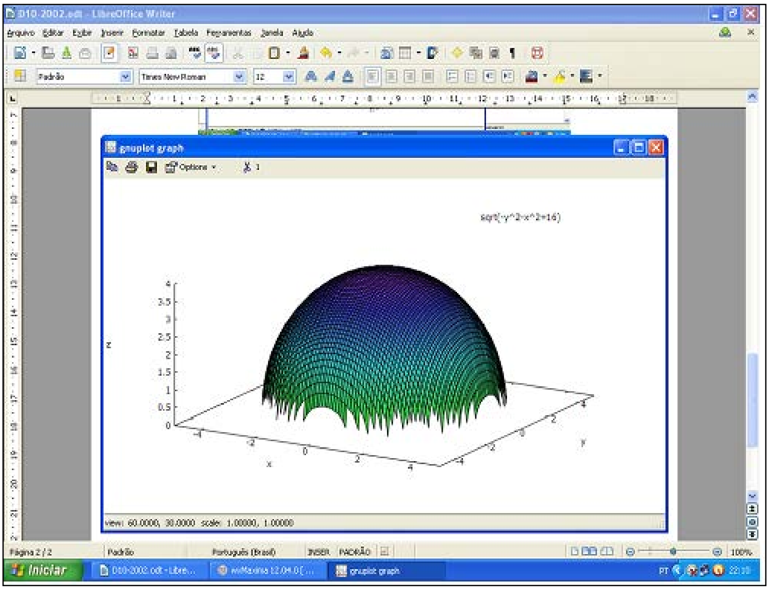


FIGURA 12 - Esboço do gráfico da função $h(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ com uma grade 100x100
Fonte: Produção do Grupo D10

A sugestão de movimentar o gráfico de modo a visualizar a região do plano que corresponde ao domínio da função gerou imagens como a apresentada na Figura 13 pelo Grupo D5. Esse grupo utilizou valores diferentes para a grade.

Tendo identificado o domínio como a região interna da circunferência obtida na imagem e estando o ponto (3,3) fora dessa região, os estudantes expressaram seu entendimento sobre o domínio, como exemplificado pelo relato do Grupo D5: “A região que não é possível calcular é aquela que está fora do domínio”.

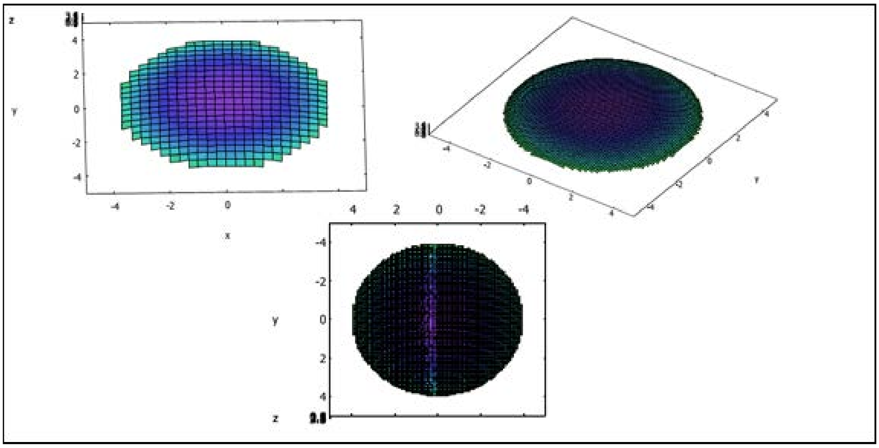


FIGURA 13 - Sequência da visualização da região plana do domínio de $h(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$
Fonte: Produção do Grupo D5

Percebe-se que o Grupo D5 conseguiu identificar a região do plano correspondente ao domínio e a região no plano em que estão localizados os pontos para os quais não é possível calcular o valor da função (pontos que não pertencem ao domínio).

Machado (2008), ao discorrer sobre visualização, destaca que as imagens provocam processos mentais como abstrações, associações e articulações, dessa forma propiciando a descoberta. A associação das imagens da projeção do gráfico no plano *xy* com a localização dos pontos para os quais é possível calcular o valor real da função pode ter contribuído para a produção de conhecimento acerca do domínio de uma função de duas variáveis.

Para responder à pergunta referente ao item **d**: "Que região do plano *xy* corresponde ao domínio da função? Faça um esboço do domínio da função.", os estudantes do Grupo D5 recorreram à estratégia da visualização da região plana que construíram, na Figura 13, respondendo: "A região que corresponde ao domínio é de -4 a 4. Todos os pontos dentro da circunferência de raio 4."

Percebemos que, mesmo tendo identificado visualmente a região plana que corresponde ao domínio (Figura 13), os alunos não apresentaram a expressão algébrica correspondente. Apesar disso, consideramos que houve produção de conhecimento pela manifestação em palavras da região correspondente, uma vez que a relação com o algébrico ainda deveria ser explorada.

Na quarta parte da atividade, os estudantes exploraram funções indicadas no roteiro, de forma livre, utilizando os recursos que julgaram interessantes. As funções foram escolhidas de modo a contemplar domínios com diferentes características e com possibilidade de boa visualização no *software*. O roteiro sugerido foi este:

Explore as funções indicadas abaixo. Procure uma boa visualização do gráfico, movimente o gráfico de modo a visualizar também o domínio, determine o domínio.

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{y - x}$

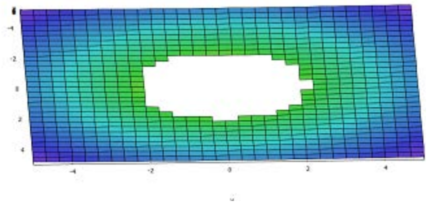
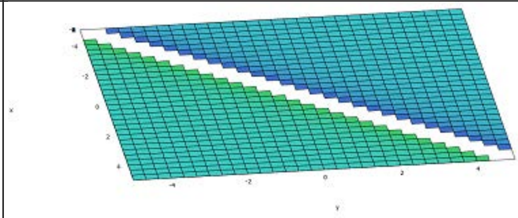
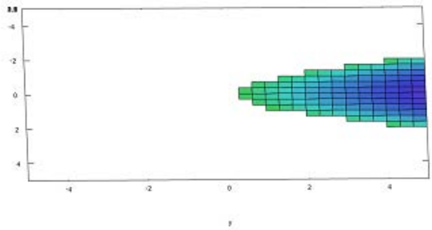
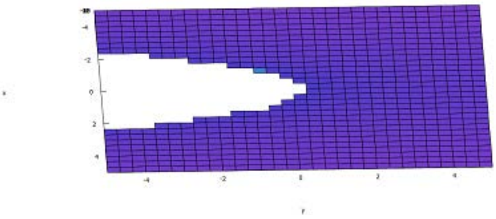
c) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

d) $f(x,y) = \log(y + x^2)$

e) $f(x,y) = x.e^{(-x^2 - y^2)}$

No Quadro 3, são apresentadas as visualizações dos domínios das funções indicadas, obtidas pelo Grupo D8.

QUADRO 3 – Visualização dos domínios das funções da quarta parte da primeira atividade

Função	Domínio
$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$	
$f(x,y)=\dfrac{1}{y-x}$	
$f(x,y)=\sqrt{y\ \ -x^2}$	
$f(x,y)=\log(y+x^2)$	

Fonte: Produção do Grupo D8

Devido ao tempo disponível, alguns grupos não concluíram a análise de todas as funções. Alguns estudantes demonstraram dificuldades para descrever o domínio na forma algébrica e isso foi retomado no terceiro encontro, quando os conceitos teóricos foram sistematizados. Apesar disso, não tiveram dificuldade em identificar que as regiões são delimitadas por curvas planas, embora elas não possam ser visualizadas como tal nas imagens obtidas. As curvas produzidas não são visíveis por conta das limitações do *software* para plotar os pontos do gráfico, gerando deformações no contorno.

Alves (2011) apresenta uma situação de exploração do gráfico da função $f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$ e do que ele chama de vista de cima do gráfico, de modo semelhante ao que fizemos em nossas atividades de domínio (como mostrado na Figura 14). O referido autor (2011, p. 54) observa que "não existe gráfico da função numa faixa bem maior do que as retas em azul, dando a impressão de que existem outros pontos onde a função não é definida".

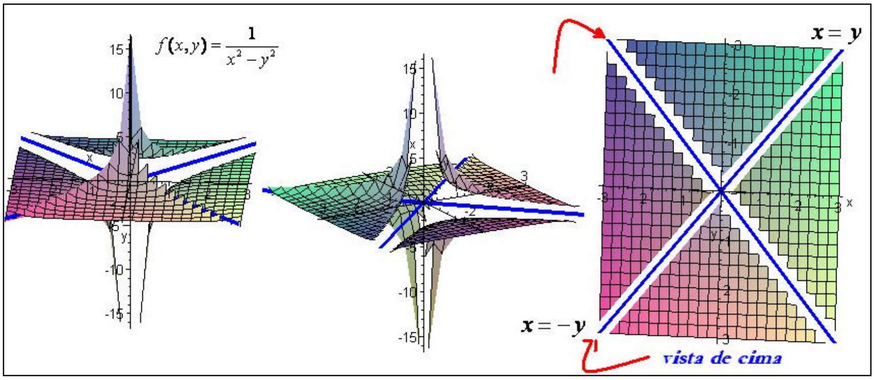


FIGURA 14 - Conflito teórico computacional relacionado à noção do gráfico da função

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2-y^2}$$

Fonte: Alves (2012, p. 54)

Esse mesmo autor (2011) acrescenta:

> É interessante notar as considerações de Giraldo (2001; 2004), inseridas no ambiente de uso da máquina, como recurso didático. Tal ambiente requer atenção maior do professor no que diz respeito a estas limitações, pois pode evitar a formulação de falsas concepções ou *imagens conceituais* contraditórias e inconsistentes. (ALVES, 2011, p. 54, grifo do autor).

No nosso caso, essas falsas concepções apontadas não aconteceram. Atribuímos isso ao fato de termos discutido com os alunos as limitações das imagens do *software* desde a primeira parte da atividade e também de termos estimulado os estudantes a aumentarem os valores da grade para melhorarem as imagens. No caso da terceira função explorada, cujo domínio era o interior da circunferência, as imagens da Figura 13 mostram uma região não tão bem definida na primeira figura (com grade 30x30) e uma melhor definição na última figura (com grade 100x100). Tendo experimentado essas possibilidades de melhorar a visualização pelo aumento da grade, parece ter sido natural o entendimento de que, para a função $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$, o que delimita a região do domínio é uma circunferência; para a função $f(x,y)=\frac{1}{y-x}$, uma reta; para as funções $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ e $f(x,y)=\log(y+x^2)$, parábolas.

Não descartamos também a possibilidade de os alunos terem feito uma associação das imagens (mesmo com as distorções devido à limitação do *software*) com as expressões algébricas que determinam os pontos onde as funções não podem ser calculadas. Nas anotações do caderno de campo, temos a manifestação de um aluno sobre a função $f(x,y)=\frac{1}{y-x}$: "a expressão y=x é uma reta".

No terceiro encontro, realizado em sala, os conceitos trabalhados utilizando o MAXIMA foram retomados e formalizados. Para essa aula, foi utilizado um *data-show* em que foi possível projetar as imagens produzidas pelos estudantes nos encontros anteriores. Alguns alunos fizeram uso de computadores pessoais, manipulando as imagens no MAXIMA.

Nesse encontro, demos especial atenção para a relação entre o tratamento algébrico e o gráfico e assim formalizamos os conceitos.

Concordamos com Villarreal (1999) sobre a importância da realização de um trabalho com os estudantes através das múltiplas representações para "conectar domínios que, de outra forma, permaneceriam separados, porém, se conectados, gerariam compreensões mais amplas e completas" (VILLARREAL, 1999, p. 341).

> Por outro lado, além da necessidade de uma coordenação entre representações múltiplas, a introdução do computador na ecologia cognitiva dos estudantes sugere, também, a necessidade de uma coordenação intermídias que, permita transitar de uma mídia a outra, levando em consideração as características próprias de cada uma. Tanto o trabalho com representações múltiplas quanto a coordenação intermídia são indispensáveis nos coletivos pensantes do qual o computador faz parte. (VILLARREAL, 1999, p. 341)

As relações entre as representações algébricas e gráficas foram percebidas como necessárias pelos próprios estudantes. Durante a exploração da função $h(x,y)$, os estudantes encontraram imagens em que havia boa definição da região interior da circunferência correspondente ao domínio (como mostrado na Figura 13). No entanto, eles observaram que a imagem não possibilitava dizer se a circunferência (pontos da fronteira) fazia ou não parte do domínio, uma vez que a imagem não dava destaque para a curva. Os alunos estabeleceram uma relação entre o domínio de funções de uma variável com o que estavam observando para duas variáveis: "Lembra no Cálculo I quando tínhamos que decidir no domínio se o intervalo era aberto ou fechado? Se o extremo era pontinho cheio ou vazio? Aqui deve ser a mesma coisa". Vemos aqui elementos da transição do cálculo de uma para duas variáveis que, de certa forma foram potencializados pelas limitações do *software*. A impossibilidade de visualizar o contorno na imagem obtida por meio do *software* estimulou os estudantes a buscarem a utilização da abordagem algébrica e gráfica simultaneamente. Primeiramente, utilizando a abordagem gráfica com o auxílio do MAXIMA para visualizar a região do domínio e depois utilizando a gráfica e a algébrica simultaneamente para esboçar a região no ambiente lápis-papel e descrever a expressão que representa o domínio. O fato de os estudantes construírem os gráficos das funções e suas projeções no plano *xy* com o auxílio do *software* e depois descreverem o domínio de forma algébrica de acordo com a restrição de cada função evidenciam que o visual e o algébrico e as diferentes mídias podem complementar-se. Isso encontra respaldo em Levy (1993) que considera que a chegada de uma nova mídia, como o computador, não substitui uma antiga como o lápis-papel. As diferentes mídias complementam-se e cada uma tem o seu papel na produção do conhecimento.

Destacamos o envolvimento e o interesse dos estudantes no desenvolvimento das atividades, a interação entre os diversos atores nesse processo de exploração dos conceitos e os resultados obtidos no que diz respeito às ideias matemáticas que foram produzidas.

No entanto, alguns fatores dificultaram o desenvolvimento da atividade. Dentre eles, citamos o grande número de alunos (43 na atividade), que, em alguns momentos, comprometeu a assistência necessária aos grupos. Outra dificuldade foi a falta de alguns conhecimentos que se esperava já estarem consolidados pelos estudantes e que foi preciso retomar, como as equações de determinadas curvas: circunferência, elipse, parábola e outras.

4.2 O segundo grupo de atividades: curvas de nível de uma função de duas variáveis

O segundo grupo de atividades abordou o tema “curvas de nível de uma função de duas variáveis” (APÊNDICE E, p. 171), sendo dividido em quatro encontros com atividades desenvolvidas no laboratório de informática e em sala de aula. Teve como principais objetivos proporcionar ao estudante condições de identificar, descrever, construir e compreender o significado das curvas de nível de uma função de duas variáveis e ainda relacionar o gráfico de uma superfície obtida a partir de função de duas variáveis com as suas respectivas curvas de nível.

O roteiro desse grupo de atividades foi construído com a ideia central de utilizar os recursos do MAXIMA para que o estudante gradativamente explorasse esse conceito e não apenas visualizasse as curvas de nível já construídas por meio do *software*. Para tanto, determinamos no roteiro as seguintes etapas:

a) traçar na superfície, gráfico da função, as curvas obtidas pelos cortes por planos do tipo z = constante;
b) projetar no plano z = 0 essas curvas, obtendo o que chamamos de Mapa de Contorno;
c) traçar as curvas de nível usando um comando do MAXIMA específico para isso;
d) comparar as imagens obtidas das duas maneiras;
e) usar uma sequência de comandos do *software* que, ao mesmo tempo, traça as curvas de nível na superfície e faz a sua projeção no plano z = 0, obtendo o Mapa de Contorno.

Esse grupo de atividades foi constituído por três partes. Na primeira, exploramos uma função seguindo todos os passos acima mencionados. Já, na segunda, sugerimos outras quatro funções para serem exploradas livremente pelos estudantes. E, na terceira, apresentamos expressões de funções e imagens de mapas de contorno pedindo que os alunos fizessem associações e verificassem suas conjecturas utilizando os recursos do MAXIMA.

A primeira parte da atividade aconteceu em dois encontros, sendo o primeiro realizado no laboratório de informática e o segundo em sala de aula. No laboratório, foi explorada uma função segundo o roteiro apresentado. Em sala de aula, os resultados obtidos na atividade e os conceitos correspondentes foram discutidos de modo teórico.

A função proposta foi $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$. A escolha dessa primeira função se deu pelo fato de ser possível uma boa visualização de sua superfície e também por suas curvas de nível serem circunferências centradas na origem, cujas equações são, de certa forma, conhecidas dos estudantes.

No roteiro dessa atividade, foi sugerido inicialmente que os estudantes definissem no MAXIMA a função $f(x,y)$ (item **a**) e esboçassem o gráfico de $f(x,y)$ (item **b**).

Os estudantes não tiveram dificuldades em construir o gráfico da função $f(x,y)$, uma vez que já haviam realizado procedimentos semelhantes no grupo anterior de atividades. Na Figura 15, está a construção do Grupo D15 para o gráfico de $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

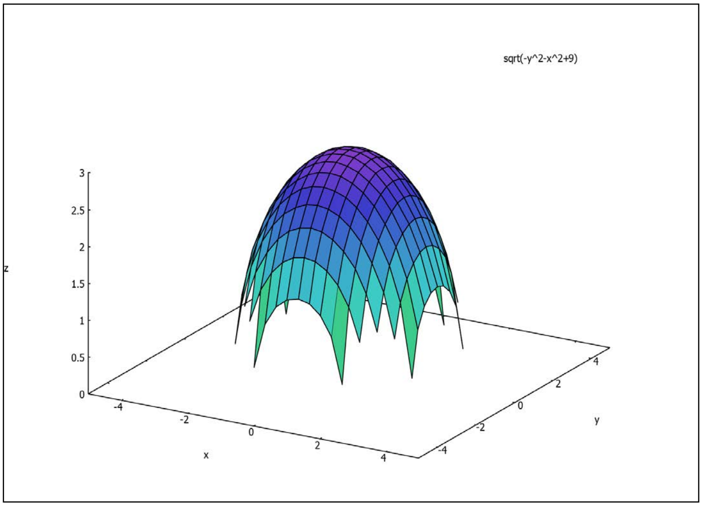


FIGURA 15 - Gráfico da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

Fonte: Produção do Grupo D15.

Mesmo não tendo sido solicitado, muitos grupos iniciaram essa atividade analisando o domínio dessa função. Isso evidenciou as ideias matemáticas acerca do domínio, produzidas no primeiro grupo de atividades, bem como a percepção dos estudantes sobre a importância da determinação do domínio para o estudo de uma função. Para ilustrar, apresentamos, na Figura 16, a visualização do domínio de $f(x,y)$ realizada pelo Grupo D7.

Movimentar a imagem para visualizar o domínio evidenciou também a maneira como os estudantes já estavam usando os recursos do *software* para resolver problemas, o que identificamos como uma transformação na prática dos estudantes, caracterizando a reorganização do pensamento com a presença da tecnologia (BORBA e VILLARREAL, 2005).

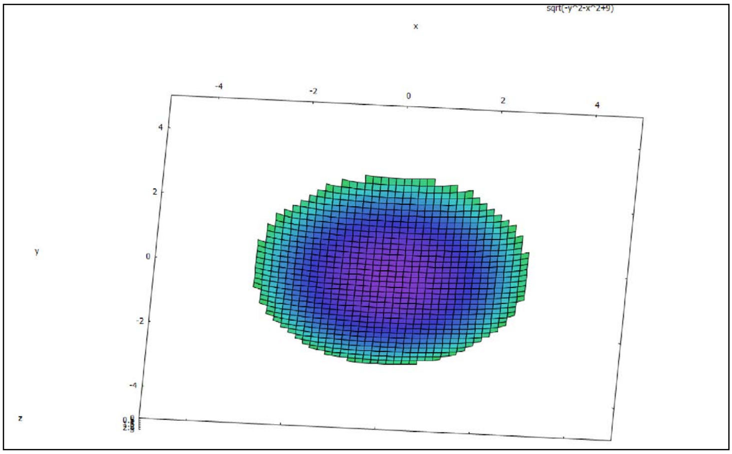


FIGURA 16 - Esboço do domínio da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$
Fonte: Produção do Grupo D7

A exemplo do primeiro grupo de atividades, muitos dos grupos utilizaram a associação das abordagens gráfica e algébrica para definirem o domínio como sendo a região formada pelos pontos internos de uma circunferência de raio 3, como observamos no registro do Grupo D7: "O domínio da função varia de -3 e 3, pois a raiz de 9 é 3. D= {(x,y) e R/ x^2+y^2<=9}". Já o Grupo D19 relatou: "Trata-se de superfície de uma circunferência, onde o domínio são os pontos internos desta, incluindo seus pontos".

Consideramos interessante esse exame do domínio realizado pelos estudantes. Interpretamos que eles perceberam a determinação do domínio como importante para o estudo de uma função, não entendendo como mera formalidade. Essa percepção, a qual caracteriza um conhecimento matemático produzido, é evidenciada no comentário de um estudante do Grupo D8: "Hoje, quando vejo uma função de duas variáveis, a primeira coisa que vem a mente é o seu domínio".

Na sequência da atividade, foi solicitada a construção do gráfico de $f(x,y)$ e as curvas de nível em sua superfície. Para isso, foi fornecida a linha de comando (Figura 17) para essa construção.

```
(%i4) grafico:"set pm3d at s; unset surface; set contour surface;\

      set cntrparam levels 30; unset key"$

      plot3d(f(x,y),[x,-3,3],[y,-3,3],[grid,50,50],[gnuplot_pm3d,true],

      [gnuplot_preamble,grafico])$
```

FIGURA 17 - Linha de comandos para a construção das curvas de nível na superfície de $f(x,y)$
Fonte: Da pesquisa

Posteriormente, os alunos realizaram a rotação do gráfico de maneira a visualizá-lo de outras posições.

Na Figura 18, está a sequência apresentada pelo Grupo D15 para a construção acima.

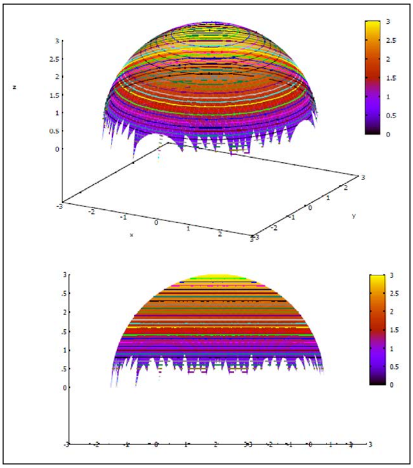


FIGURA 18 - Esboço das curvas de nível da função

$$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

Fonte: Produção do Grupo D15

O próximo passo foi movimentar o gráfico da função $f(x,y)$ de modo a visualizar o que seriam essas curvas projetadas no plano z = 0. O propósito desse item foi proporcionar aos estudantes meios para identificar e descrever as curvas de nível de $f(x,y)$. Devido à construção apresentada na tela do MAXIMA ser retangular (Figura 19), a princípio alguns grupos identificaram as curvas de nível de $f(x,y)$ como elipses, fato observado pelo pesquisador devido aos comentários dos estudantes.

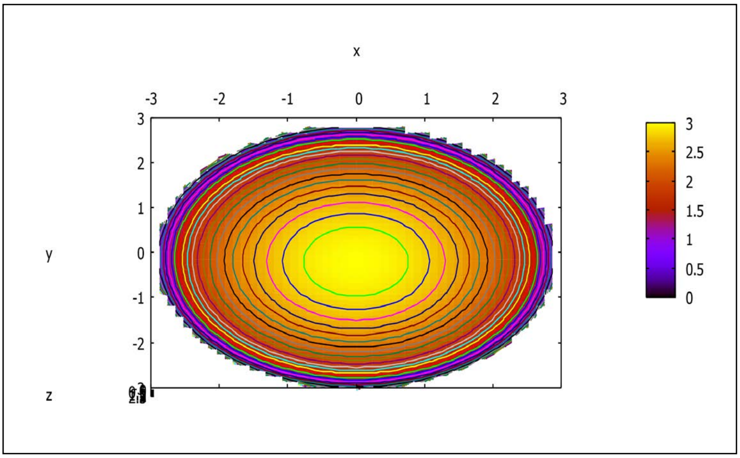


FIGURA 19 - Esboço das curvas de nível da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ no plano z = 0
Fonte: Da pesquisa

Eles foram estimulados a examinar o gráfico das curvas de nível da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ (Figura 19) com cuidado, e perceberam que as curvas de nível estavam centradas na origem e que ambos os eixos tinham o mesmo intervalo de variação, de -3 a 3, embora a aparência fosse de um retângulo. Isso os levou a concluírem que a imagem estava deformada. Alteraram a forma do quadro da figura para quadrangular e identificaram as imagens obtidas com circunferências. Exemplificamos esse fato com a visualização das curvas de nível apresentada pelo Grupo D15 em seu relatório na Figura 20.

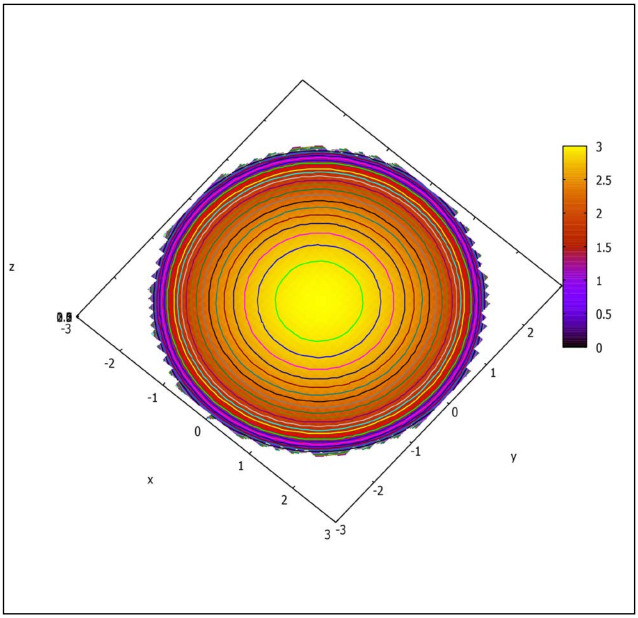


FIGURA 20 - Esboço das curvas de nível da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ no plano z = 0 do grupo D15
Fonte: Produção do Grupo D15

Pela vista superior, os estudantes produziram a ideia matemática de que as curvas de nível da função $f(x,y)$ são circunferências e, fazendo uma associação com o domínio dessa função, concluíram que as curvas de nível são circunferências com raio R variando de zero a três. Conectando essas informações com a visualização frontal do segundo gráfico da Figura 19, os estudantes identificaram as curvas de nível como cortes na superfície de $f(x,y)$, sendo uma curva de nível para cada valor z = c.

Isso se manifesta nos relatos do Grupo D2: "A projeção com z = 0 mostra várias circunferências com raios diferentes, tendo um número limitado de curvas de raio variando de 0 a 3". E o Grupo D15 ainda afirma: "Cada altura forma uma curva de nível. Os cortes são representados por círculos". Acreditamos que a escala de cores, mostrada na Figura 20, contribuiu para que essa relação fosse estabelecida.

Outra ferramenta utilizada para a construção das curvas de nível foi o comando **contour_plot**, que traça as curvas de nível apenas no plano *xy*. A imagem gerada pelo *software*, nesse caso, é semelhante às imagens construídas por professores nas suas explicações utilizando apenas a mídia lápis-papel. Nesse tipo de abordagem, geralmente é dada ênfase à abordagem algébrica, não garantindo que de fato se estabeleça uma conexão entre as curvas planas e a superfície tridimensional.

Na exploração proposta aos estudantes, pedimos a eles que comparassem esse gráfico com os construídos nos itens anteriores. Na Figura 21, está o esboço dos gráficos construídos pelo Grupo D3 para comparar as formas de construção das curvas de nível pelo MAXIMA.

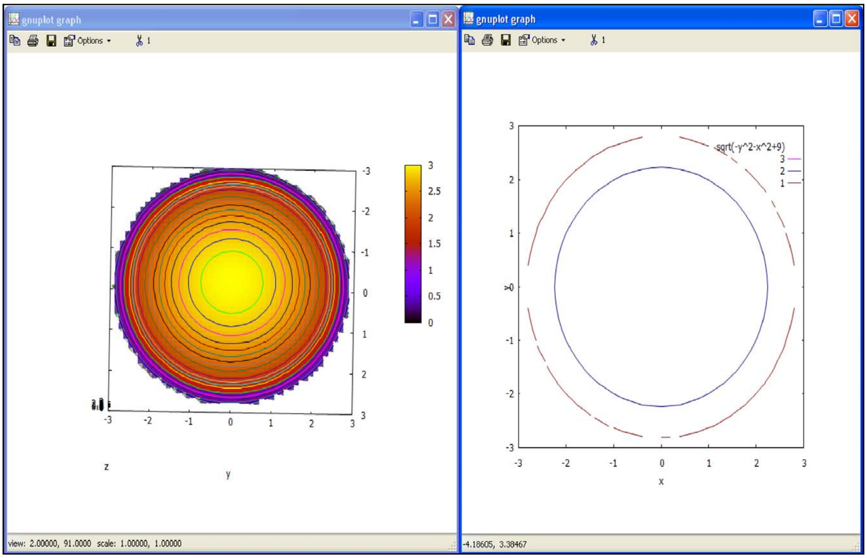


FIGURA 21 - Esboço das curvas de nível da função $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$ obtidas nos itens **d** e **e**
Fonte: Produção do Grupo D3

O MAXIMA possui um recurso que permite construir um gráfico de uma função de duas variáveis com as respectivas curvas de nível na sua superfície e no plano *xy*, podendo ainda determinar a quantidade de curvas de nível que se deseja. Esse recurso é constituído por uma sequência de comandos que está descrito na Figura 22.

```
grafico:"set pm3d at s; unset surface; set contour both;\

set cntrparam levels 30; unset key"$

plot3d(f(x,y),[x,-3,3],[y,-3,3],[grid,50,50],[gnuplot_pm3d,true],

[gnuplot_preamble,grafico])$
```

FIGURA 22 - Sequência de comandos para a construção do gráfico de $f(x,y)$ com as suas curvas de nível na superfície e no plano *xy*
Fonte: Da pesquisa

Mesmo sabendo desse recurso do MAXIMA, optamos por não utilizá-lo no início por julgarmos que, dessa forma, estaríamos apenas mostrando as imagens como algo pronto, apenas para ilustrar, dando um sentido para a visualização que não é o que buscamos na pesquisa. No dizer de Machado (2008), a imagem deve ir além da simples ilustração, provocando processos mentais como associações e articulações que levam à descoberta. Sugerimos o uso das imagens para uma exploração passo a passo por entendermos que essa forma poderia dar mais subsídios para que a ideia matemática das curvas de nível fosse produzida pelos estudantes.

Tendo explorado anteriormente e, depois usando esse novo recurso, os estudantes construíram, observaram e moveram o gráfico da função. Na Figura 23, está o gráfico produzido pelo Grupo D19.

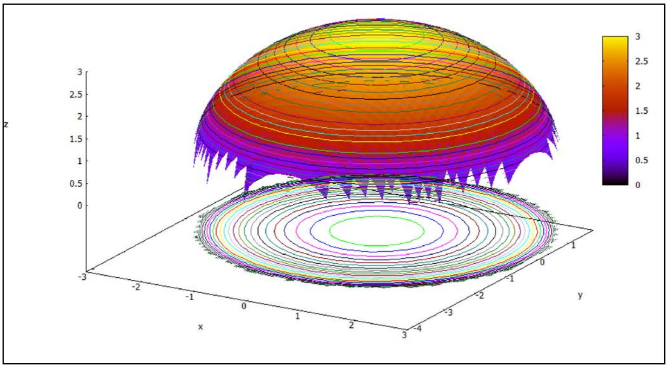


FIGURA 23 - Gráfico de $f(x, y)$ com as suas curvas de nível na superfície e no plano *xy*
Fonte: Produção do Grupo D19

Os estudantes consideraram essa a melhor construção realizada até aquele momento para essa atividade. Consideramos que a imagem consolidou o conhecimento que estava sendo produzido passo a passo. É como se a imagem visualizada possibilitasse verificar as conjecturas estabelecidas anteriormente. Abaixo estão os registros dos estudantes que nos dão indícios do conhecimento produzido acerca das curvas de nível dessa função explorada.

> Nota-se que aparecem as projeções bem definidas.
> Formando também uma circunferência.
> No plano *xy* tem uma circunferência de raio 3. São todas formadas por circunferência e o raio está variando de 0 a 3.
> As curvas de nível indicam uma distância vertical acima, ou abaixo, de um plano de referência de nível. (GRUPO D8)

> Observa-se que as curvas de nível são representadas por circunferências no gráfico, projetadas em 2d, sendo o anterior projetado em 3d permitindo uma melhor visualização.
> À medida que diminui o raio, aproxima-se da extremidade superior do gráfico.
> As curvas de nível diminuem de tamanho de acordo que vai aumentando a altura. (GRUPO D15)

Segundo Borba e Villarreal (2005), a mídia computacional incentiva abordagens em que a visualização tem um papel primordial. Essa visualização das curvas de nível como cortes da superfície e a sua projeção no plano *xy*, caracterizando o Mapa de Contorno, foi potencializada com a utilização do computador.

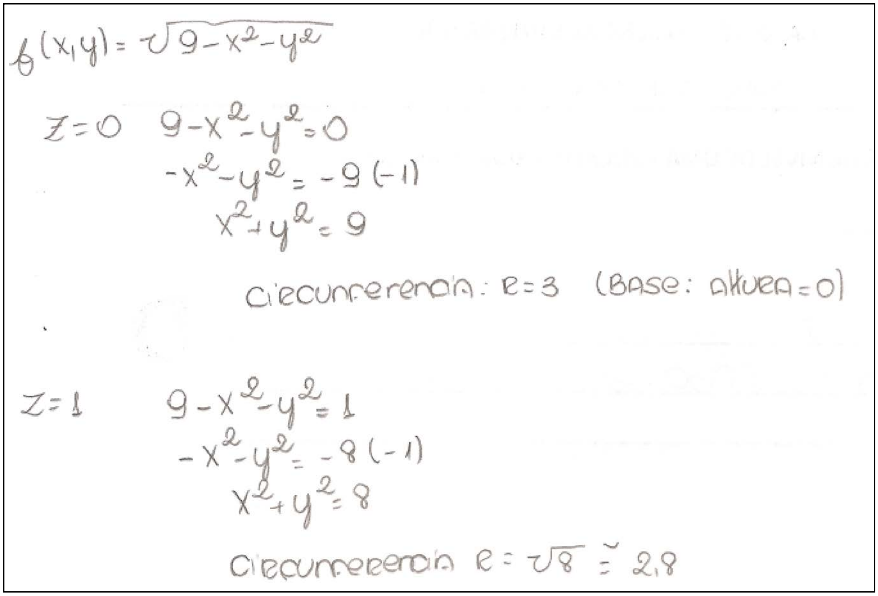
Essa exploração foi importante, pois, com essas informações, os estudantes compreenderam algumas características do mapa de contorno da função $f(x, y)$. Como, por exemplo, para cada valor do raio R entre $0 \leq R \leq 3$, temos um conjunto de pontos que formam uma circunferência que está à determinada altura (valor de z) do plano *xy*. Assim, concluíram que, a medida do raio diminui aproximando de zero, o valor de z aproxima da extremidade superior do gráfico, nesse caso z = 3.

Na sequência do roteiro, buscamos fazer a relação entre as imagens visualizadas e as equações correspondentes. Para isso, pedimos que os estudantes escrevessem equações das curvas de nível obtidas a partir da função $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ para valores de $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ e $z = 3$ e as representassem graficamente. A maioria dos estudantes optou por utilizar o ambiente lápis-papel para o desenvolvimento desse item. Esse tipo de mídia está muito presente na vida acadêmica dos discentes e é usado com frequência por eles, sobretudo em situações em que ela se mostra suficiente para atender os objetivos pretendidos.

Nesse caso, os estudantes não viram necessidade de buscar os recursos da tecnologia para resolver o que foi pedido. Reconhecendo o papel dessa mídia na produção do conhecimento, concordamos com Borba e Villarreal (2005, p. 92), que afirmam:

> livros, papel e lápis são meios de comunicação que permitem a aprendizagem e compreensão matemática, mas eles são tão incorporados às atividades matemáticas que suas influências sobre a construção do conhecimento matemático são quase imperceptíveis ou invisíveis.

Na Figura 24, apresentamos o desenvolvimento do Grupo D12 que utilizou a mídia lápis-papel para encontrar as equações das curvas referentes a $z = 0$ e $z = 1$.


$f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$

$Z=0 \quad 9-x^2-y^2=0$

$-x^2-y^2=-9\ (-1)$

$x^2+y^2=9$

Circunferencia: $R=3$ (BASE: altura $=0$)

$Z=1 \quad 9-x^2-y^2=1$

$-x^2-y^2=-8\ (-1)$

$x^2+y^2=8$

Circunferencia $R=\sqrt{8} \cong 2{,}8$

FIGURA 24 - Processo utilizado para encontrar as equações das curvas de nível de $f(x,y)$
Fonte: Produção do Grupo D12

Outros grupos também calcularam e fizeram esboços na mídia lápis -papel, tendo cuidado ao representar os raios nas escalas utilizadas. Na Figura 25, está o mapa de contorno construído pelo Grupo D4 utilizando a mídia lápis-papel.

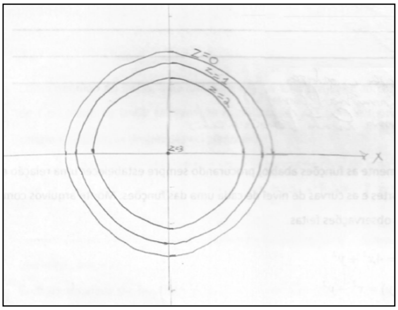


FIGURA 25 - Esboço das curvas de nível de $f(x,y)$
para z = 0, z = 1, z = 2 e z = 3
Fonte: Produção do Grupo D4

Após essa etapa, pedimos que os estudantes comparassem suas construções com as que tinham obtido, utilizando o comando **contour_plot** do MAXIMA e também com o gráfico da superfície de $f(x,y)$ com as respectivas curvas de nível em sua superfície e no plano xy (Figura 23). Os estudantes manifestaram que, utilizando o MAXIMA para o traçado de gráficos e suas respectivas curvas de nível, é possível obter detalhes que não são percebidos quando é utilizado o ambiente lápis-papel. Como descreve o Grupo D15: "O que podemos observar é que tanto o exercício feito manual e o exercício feito pelo MAXIMA, a visualização das camadas das curvas de níveis são visíveis, mas o programa é mais rico em informações".

Para finalizar essa parte da atividade, foi colocada a seguinte questão: "Você acha que as curvas de nível dão algum tipo de informação sobre o gráfico da função? É possível imaginar o gráfico de uma função conhecendo os traçados das curvas de nível e os respectivos valores de z? Explique".

A questão provocou reflexões entre os estudantes. Até então eles tinham partido da imagem do gráfico para obter as curvas de nível e a pergunta invertia essa ordem: das curvas de nível para o gráfico. Muitos tiveram dúvidas e houve um momento de discussão entre os estudantes. Não houve consenso nas respostas evidenciando diferentes níveis de compreensão sobre o tema.

De acordo com o Grupo D9: "Sim, pelas diferenças de contornos das curvas, é possível imaginar o gráfico. Pelas curvas de nível, é possível ter ideia de qual será o formato do gráfico esboçado".

E o Grupo D10 relatou: "A variação dos níveis *dão* (*sic*) a ideia do gráfico".

Já o Grupo D8 corrobora o D10 ao afirmar: "Sim é possível imaginar o gráfico conhecendo as informações do domínio".

E ainda o Grupo D15 aduz: "Sim. É possível imaginar o gráfico de uma função conhecendo os traçados das curvas de nível e os respectivos valores de Z".

Entretanto, o Grupo D5 chegou à seguinte conclusão: "Ao observar os cortes do gráfico, não é possível imaginá-lo. As curvas de nível são fundamentais para sua interpretação, pelo menos à primeira vista. Ao longo do uso, possivelmente, identificaremos parte do gráfico ao visualizar a base."

No terceiro encontro, foi realizada a segunda parte desse grupo de atividades, propondo aos estudantes que procurassem estabelecer relações entre os gráficos, os cortes e as curvas de nível das funções indicadas a seguir:

a) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

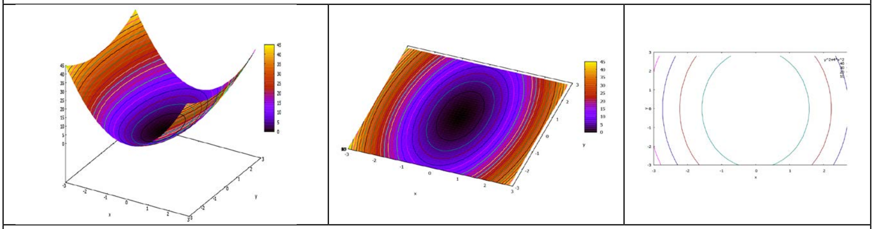
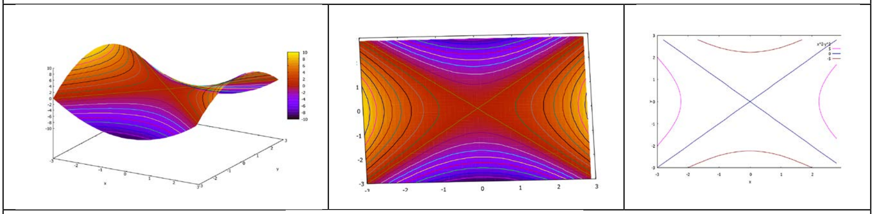
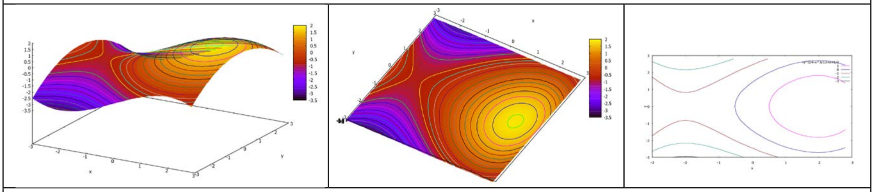
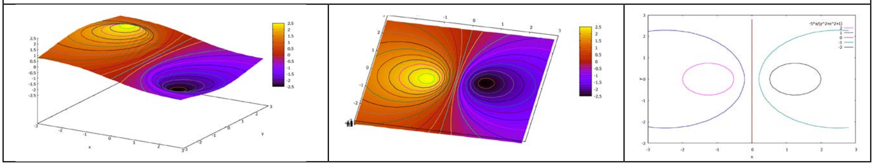
b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

c) $f(x,y) = x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$

d) $f(x,y) = \frac{-5x}{x^2 + y^2 + 1}$

Nessa parte da atividade, os estudantes ficaram à vontade para utilizarem o caminho e os métodos de sua preferência. Observamos que eles, em geral, optaram por fazer a exploração passo a passo, assim como havíamos feito para a primeira função. Isso reforçou nossa ideia inicial de que esse tipo de abordagem poderia favorecer a exploração do conceito. Os estudantes usaram as imagens para comunicar suas ideias, o que está de acordo com a forma que Frota (2013) se refere à visualização. No Quadro 4, estão os esboços dos gráficos construídos pelo Grupo D15.

QUADRO 4 – Esboços dos gráficos das funções de segunda parte da segunda atividade

$f(x,y) = 4x^2 + y^2$

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$f(x,y) = x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$

$f(x,y) = \frac{-5x}{x^2 + y^2 + 1}$


Fonte: Produção do Grupo D15

Os estudantes também tentaram obter as equações das curvas. Isso foi dificultado pelo fato de parte dos estudantes não ter bom domínio de conteúdos de geometria. Nesse momento, fez-se necessária uma revisão das equações das principais curvas no plano.

Na terceira atividade desse grupo, foram fornecidos alguns gráficos das curvas de nível (APÊNDICE F, p.177) e também algumas expressões de funções. Foi solicitado aos estudantes que, tendo como base as curvas de nível, imaginassem os gráficos e associassem as curvas às expressões das funções. Posteriormente, eles deveriam esboçar os gráficos com auxílio do MAXIMA e testar suas conjecturas.

Na quarta parte da atividade, foi apresentado o gráfico de uma função de duas variáveis (Figura 26), solicitando que desenhassem na sua superfície as curvas de nível e fizessem um esboço dessas curvas de nível no plano *xy*.

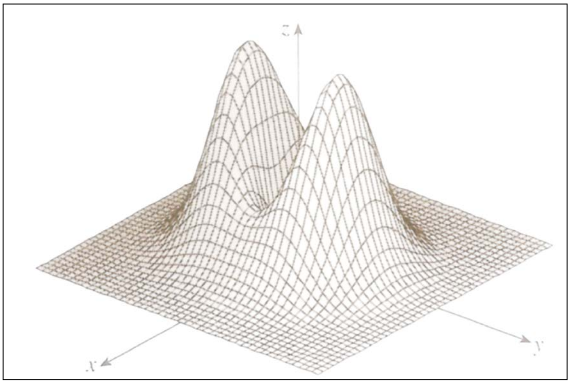


FIGURA 26 - Gráfico de uma função $f(x, y)$

Fonte: Adaptado de Stewart, 2010, p. 897

Realizando essa questão no ambiente lápis-papel, os estudantes a consideraram difícil, alegando tratar-se de um ambiente estático que não oferece possibilidade de mover a figura como no ambiente informatizado. No entanto, conseguiram realizar o que foi proposto, e muitos grupos obtiveram mapas de contorno próximos do ideal, o que evidencia o conhecimento produzido no coletivo de seres-humanos-com-mídias. Para exemplificar, mostramos, na Figura 27, o traçado das curvas de nível na superfície de $f(x, y)$ e, na Figura 28, o esboço das curvas de nível no plano xy apresentadas pelo Grupo D2.

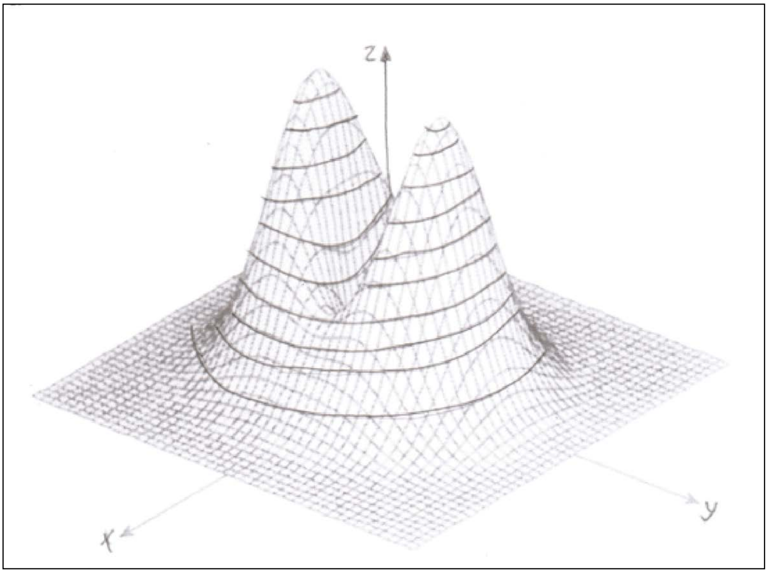


FIGURA 27 - Esboço das curvas de nível de $f(x, y)$
Fonte: Da pesquisa

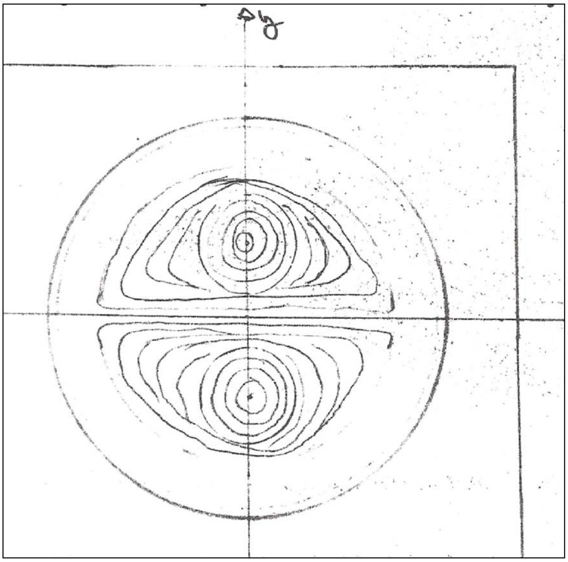


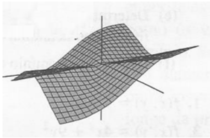
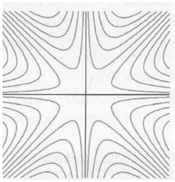
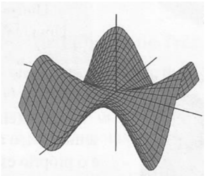
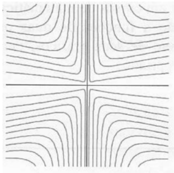
FIGURA 28 - Esboço das curvas de nível de $f(x, y)$ plano xy
Fonte: Produção do Grupo D2

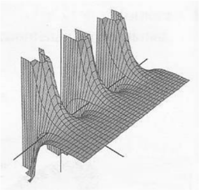
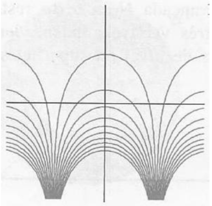
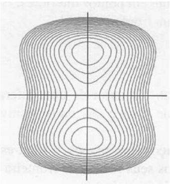
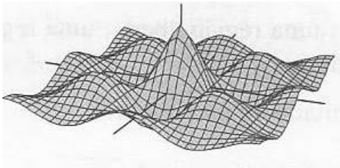
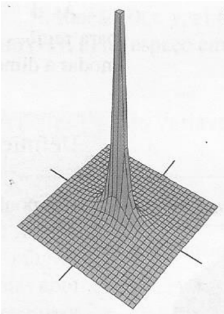
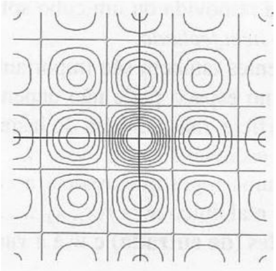
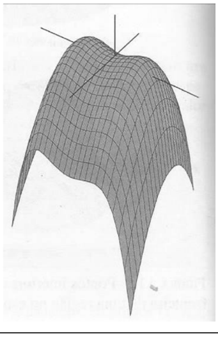
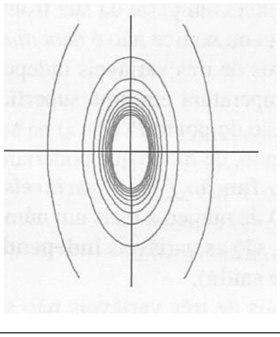
Tudo indica que, para resolver essa tarefa, os estudantes recorreram às habilidades desenvolvidas durante as atividades principalmente relacionadas à visualização.

Apresentamos a manifestação escrita do Grupo D2: “Ao se fazer os cortes, tem-se a compreensão de se formar círculos quando k assume valores próximos à base *x,y*. Quando o valor de k aumenta, as curvas de nível ficam parecidas com elipse”.

A associação das curvas de nível com os gráficos de funções foi solicitada aos alunos também na primeira avaliação, feita sem o uso de tecnologias. Na questão (Quadro 5), não foram apresentadas as expressões das funções. Apesar da grande reclamação inicialmente causada por essa questão, quase todos os estudantes conseguiram fazer as associações corretamente. Isso nos fornece indícios de que foi produzido conhecimento acerca das curvas de nível durante a realização do segundo grupo de atividades, desenvolvida com o MAXIMA e outras mídias.

QUADRO 5 – Quarta questão da primeira avaliação

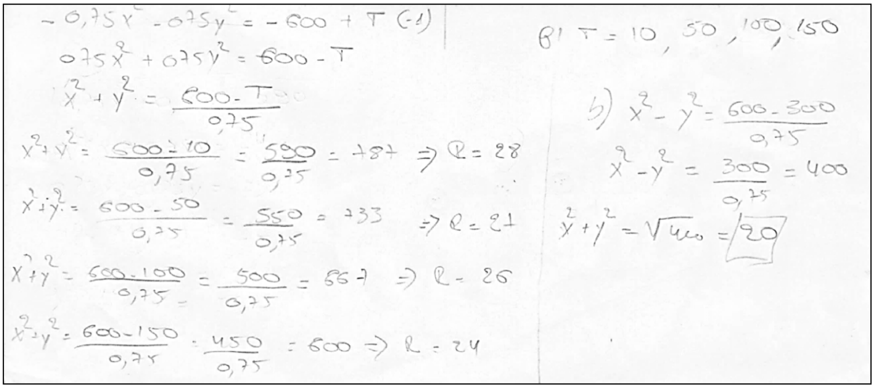
Os gráficos abaixo mostram as curvas de nível para as funções cujos gráficos são mostrados de (A) a (F). Associe cada função às curvas de nível correspondentes.	
(A) 	( ) 
(B) 	( ) 

(C) 	( ) 
(D) 	( ) 
(E) 	( ) 
(F) 	( ) 

Fonte: Adaptado THOMAS, G. B. *Cálculo*. V. 2. p. 262

A última atividade teve o objetivo de abordar outros significados das curvas de nível, além dos aspectos geométricos. Nesse caso, foi dada a função da temperatura $T(x, y) = 600 - 0,75x^2 - 0,75y^2$ de uma placa de aço de dez metros de raio e as isotérmicas foram definidas como curvas de nível da função temperatura. Foi solicitado o esboço de algumas curvas isotérmicas e também a isotérmica correspondente à temperatura de 300º.

Acompanhando o desenvolvimento dos grupos, observamos que eles não tiveram grandes dificuldades em compreender o que foi solicitado e, assim, conseguiram desenvolver essa questão. Inicialmente, os estudantes recorreram à abordagem algébrica, realizando os cálculos necessários para encontrarem as equações das curvas de nível. Na Figura 29, apresentamos o desenvolvimento do Grupo D10 que atribuiu os valores para a temperatura, sendo de 10, 50, 100 e 150. Pelas equações obtidas, esse grupo percebeu que as curvas eram circunferências de raio R e centro na origem. Com esses dados, construíram um mapa de contorno dessas curvas isotérmicas (Figura 30).



$-0,75x^2 - 0,75y^2 = -600 + T \; (-1)$

$0,75x^2 + 0,75y^2 = 600 - T$

$x^2 + y^2 = \frac{600 - T}{0,75}$

$x^2 + y^2 = \frac{600 - 10}{0,75} = \frac{590}{0,75} = 787 \Rightarrow R = 28$

$x^2 + y^2 = \frac{600 - 50}{0,75} = \frac{550}{0,75} = 733 \Rightarrow R = 27$

$x^2 + y^2 = \frac{600 - 100}{0,75} = \frac{500}{0,75} = 667 \Rightarrow R = 26$

$x^2 + y^2 = \frac{600 - 150}{0,75} = \frac{450}{0,75} = 600 \Rightarrow R = 24$

a) $T = 10, 50, 100, 150$

b) $x^2 - y^2 = \frac{600 - 300}{0,75}$

$x^2 - y^2 = \frac{300}{0,75} = 400$

$x^2 + y^2 = \sqrt{400} = \boxed{20}$

FIGURA 29 - Desenvolvimento para encontrar as curvas de nível
Fonte: Produção do Grupo D10

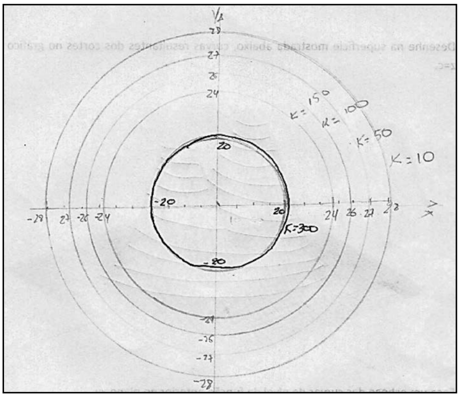


FIGURA 30 - Construção das curvas de nível da função

$T(x, y) = 600 - 0,75x^2 - 0,75y^2$

Fonte: Produção do Grupo D10

Com a análise dos dados apresentados pelos estudantes referentes a esse grupo de atividades, fica evidente que existiu a produção do conhecimento acerca de curvas de nível de uma função de duas variáveis. Foi possível identificar cada uma delas como um conjunto de pontos onde a função temperatura assume valor constante, dando significado que extrapola a relação da curva com o gráfico da função. Nesse caso, mesmo não tendo partido do gráfico da função, os estudantes encontraram as equações das curvas e as representaram no mapa de contorno.

4.3 O terceiro grupo de atividades: conceito e interpretação geométrica das derivadas parciais

Esse grupo de atividades teve o objetivo principal explorar a interpretação geométrica das derivadas parciais, tendo como referência a interpretação geométrica das derivadas ordinárias. Trata-se, portanto, de um momento importante da transição do cálculo de uma para duas variáveis. O conceito, a definição matemática e a interpretação geométrica das derivadas ordinárias foram retomados. Para tanto, foi considerada uma função contínua $f(x)$, um ponto A de abscissa x_0 no domínio de $f(x)$, um acréscimo Δx na direção do eixo x e um ponto B de abscissa $x_0 + \Delta x$. Foi construída no quadro a Figura 31, mostrada abaixo.

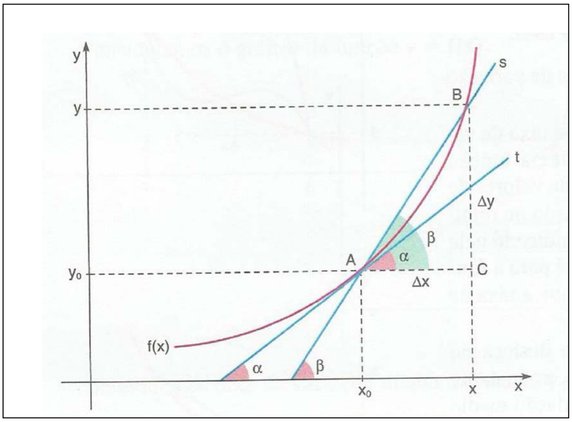


FIGURA 31 - Interpretação geométrica da derivada de uma função de uma variável
Fonte: GIOVANNI, J. R. *Matemática completa*. p. 244

Assim, foi exposto que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ representa a razão de variação (variação média) e que esse valor é o coeficiente angular da reta secante à curva nos pontos A e B, ou seja, é a $tg\beta$, onde β é o ângulo que a reta secante s faz com o eixo x.

Nesse momento, os estudantes foram instigados a responder a questão: "O que acontece quando $\Delta x \to 0$?". Após as reflexões e os comentários dos estudantes, foi retomada a definição da derivada da função de uma variável. Foi observado que o ponto B tenderá ao ponto A e a reta secante s tenderá a ser tangente à curva (reta tangente t). Dessa forma, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = tg\,\alpha$ Assim, foi definida a derivada da função $f(x)$ no ponto de abscissa x_0 por meio do limite: $\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
O significado dado para a derivada foi o de taxa de variação e a interpretação geométrica foi a do coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto x_0.

O conceito foi estendido para funções de duas variáveis considerando que, nesse caso, como o domínio é uma região plana, o acréscimo no ponto $P(x, y)$ pode se dar em várias direções. Quando esse acréscimo se dá apenas na direção do eixo x, y permanece constante e temos a derivada parcial em relação a x. Quando esse acréscimo se dá apenas na direção do eixo y, x permanece constante e temos a derivada parcial em relação a y. E assim foram definidas as derivadas parciais, também pelos limites, de forma análoga à derivada ordinária. Buscamos assim abordar um dos elementos da transição interna do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis apontados por Alves (2011) que apresentamos na Figura 1.

Foram também trabalhadas as formas de calcular as derivadas parciais, tanto usando a mídia lápis-papel, como o *software* MAXIMA.

Para a interpretação geométrica das derivadas parciais foram propostas atividades (APÊNDICE F, p. 177) para serem resolvidas, utilizando os recursos gráficos do MAXIMA. Para explorar a interpretação geométrica das derivadas parciais, seria necessária a construção das superfícies gráficos das funções, de planos no tipo x = constante ou y = constante e das curvas obtidas pelas interseções das superfícies com os planos. Uma forma de obter essas imagens no MAXIMA é a representação na forma paramétrica, e a sequência dos comandos necessários para essas construções é extensa. Por essa razão, optamos por apresentar junto ao roteiro das atividades todas as linhas de comando para as construções necessárias ao desenvolvimento desta atividade.[26]

Devido à complexidade dessa atividade, foi necessário que o professor fosse orientando passo a passo as construções feitas, acompanhando muito de perto as ações dos estudantes. Inicialmente foi apresentada aos estudantes a seguinte situação:

"Uma questão que frequentemente se apresenta nas aplicações de funções de várias variáveis é 'Como o valor da função será afetado por variações em uma das variáveis independentes?' Podemos respondê-la considerando as variáveis independentes uma de cada vez. Dessa forma,

[26] Essas linhas de comandos também estavam disponíveis em um arquivo nos computadores.

a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a **x** em (x_0, y_0) é obtida derivando a variável *x* mantendo-se *y* fixo. Analogamente, a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a *y* em (x_0, y_0) é obtida derivando a variável *y* mantendo-se *x* fixo.

Como você já sabe, podemos utilizar as seguintes notações para as variáveis parciais:

$$f_x(x,y) \ \ ou \ \ \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_y(x,y) \ \ ou \ \ \frac{\partial f}{\partial y}$$

O que representa o valor numérico de cada derivada parcial aplicada em determinado ponto?"

Muitos dos estudantes responderam que a derivada representava a taxa de variação, o que revela a transição das derivadas ordinárias para o conceito correspondente nas derivadas parciais, mas não tinham ideia de que significado geométrico esse número poderia ter.

Em seguida, foi proposto explorar a derivada parcial de $f(x,y) = 8 - x^2 - 2y^2$ em relação a variável *x* no ponto inicial $P(1,2)$:

- Nas derivadas parciais, consideramos uma das variáveis como constante. No caso de $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)}$, qual variável deve ser considerada constante e qual deve ser o valor desta constante?
- Quando fazemos y = constante, temos um plano paralelo ao plano *xz*. Esse plano tem interseção com a superfície do gráfico de $f(x,y)$.

Para visualizar essa situação com o auxílio do MAXIMA, foram inseridas as linhas de comando, obtendo o gráfico da Figura 32.

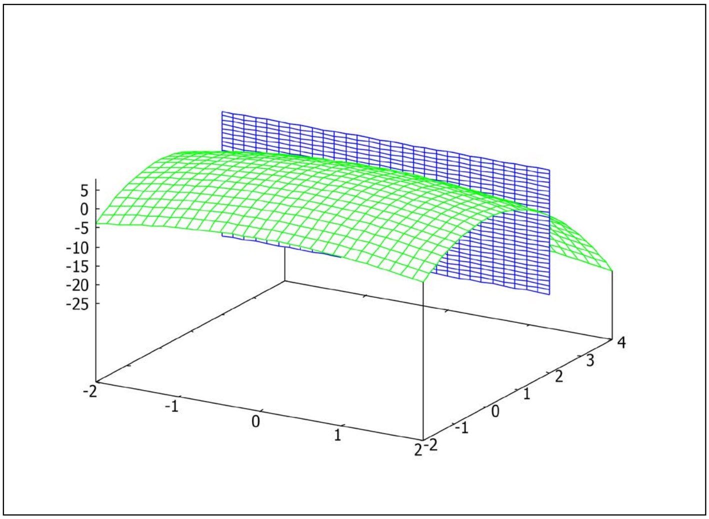


FIGURA 32 - Gráfico da interseção de $f(x,y)=8-x^2-2y^2$ com o plano $y=2$
Fonte: Produção dos estudantes

Os estudantes realizaram a rotação desse gráfico e, em seguida, perguntou-se a eles: “Você consegue visualizar a interseção do gráfico de $f(x,y)$ e do plano y =2? O que é esta interseção?”

Devido às limitações da plotagem do gráfico, como vemos na Figura 36, inicialmente foi difícil para os estudantes identificarem a interseção das duas superfícies. Surgiram várias respostas: “é uma linha”, “uma curva”, dentre outras. Essa identificação foi possível nas atividades que se seguiram a esta.

Foi proposto aos alunos que estudassem a função $f(x,2)=-x^2$, obtida a partir de $f(x,y)=8-x^2-2y^2$, substituindo y por 2 e comparassem essa curva com a curva interseção da função $f(x,y)$ com o plano $y=2$. Em seguida, foi pedido que determinassem a equação da reta tangente à curva no ponto $x=1$ e esboçassem o gráfico dessa reta no mesmo sistema de eixos que a curva. A ideia era favorecer a transição de uma para duas variáveis, tratando a função $f(x,2)$ como uma curva plana. Para isso, buscamos a identificação das curvas no plano e no espaço e também esboçamos a reta tangente à curva interseção da superfície com o plano $y = 2$. A Figura 33 exemplifica essa construção.

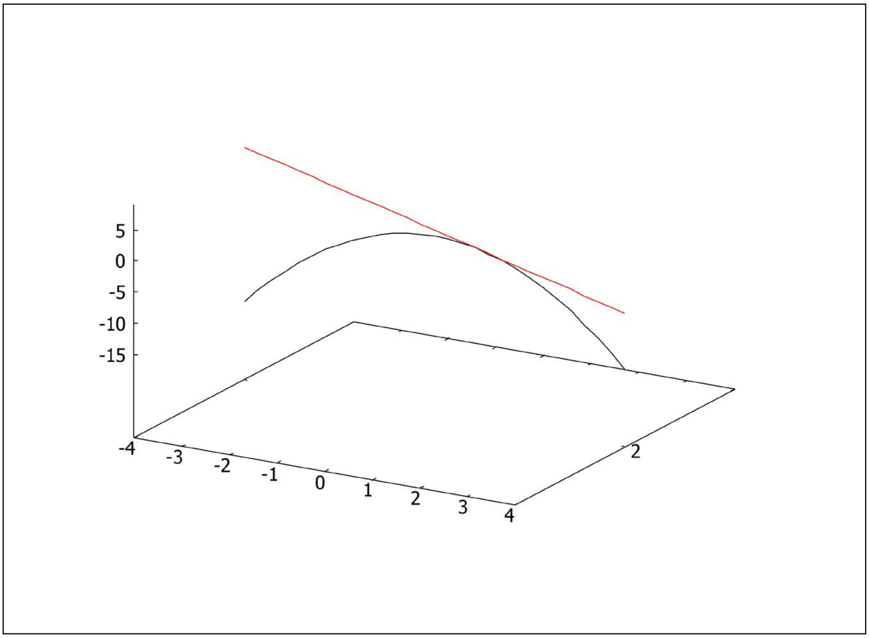


FIGURA 33 - Gráfico da interseção de $f(x,y) = 8 - x^2 - 2y^2$ com o plano y = 2 e da reta tangente à curva
Fonte: Produção dos estudantes

Como já apresentado no Capítulo 1, Alves (2011) defende a ideia de que alguns aspectos do cálculo de várias variáveis poderiam ser explorados no cálculo de uma variável e cita, como exemplo, estudo de curvas no espaço tridimensional definidas na forma $z = f\left(x\right)$ ou $z = f\left(y\right)$ e das taxas de variação desse tipo de função. No nosso caso, esses assuntos não tinham sido explorados no cálculo de uma variável da forma como Alves sugere. Mas retomamos os conceitos de uma variável, relacionamos a curva no espaço com a curva plana, retomamos a ideia da reta tangente e da derivada ordinária como coeficiente angular da reta tangente à curva para fazermos a transição para duas variáveis e trabalharmos os conceitos correspondentes.

Os estudantes foram questionados sobre a interpretação geométrica da derivada parcial aplicada no ponto. Fizeram a relação com a derivada ordinária, identificando o valor da derivada com o coeficiente angular da reta tangente à curva interseção da superfície com o plano *y = constante*.

Na aula seguinte, as imagens e os conceitos correspondentes foram retomados de modo teórico.

No relato das atividades referentes aos extremos de funções de duas variáveis, que se seguem a estas, apresentaremos alguns registros dos estudantes que revelam a produção de conhecimento relativo à interpretação geométrica das derivadas parciais.

4.4 O quarto grupo de atividades: extremos de uma função de duas variáveis

Este grupo de atividade (roteiro no APÊNDICE G, p. 145) foi desenvolvido em quatro encontros. Teve como objetivo geral explorar e estimar os extremos de funções de duas varáveis, encontrar formas para determinação desses extremos e finalmente classificar pontos críticos usando o teste da derivada de segunda ordem.

Diferentemente das atividades anteriores, por opção dos alunos e concordância do professor-pesquisador, as atividades desse quarto grupo foram desenvolvidas na própria sala de aula com o uso de *notebooks* dos estudantes. Durante a realização das atividades anteriores no laboratório de informática, algumas dificuldades apareceram: a necessidade de deslocamento para o laboratório que ocasionava uma diminuição do tempo da aula, alguns problemas técnicos com o funcionamento dos computadores e também a disposição física dos computadores (Figura 2, p. 53) que não favorecia as discussões entre os estudantes nos grupos, assim como as discussões entre os grupos e o professor-pesquisador.

Essa nova dinâmica com os *notebooks* proporcionou um ambiente de aprendizagem ainda mais interativo, favorecendo os diálogos, evidenciando que o uso das tecnologias digitais na escola deve ultrapassar os limites dos laboratórios de informática, fazendo parte do cotidiano da sala de aula.

As atividades foram divididas em quatro partes. Na primeira delas, os alunos foram solicitados a examinar duas funções procurando identificar se elas têm pontos de máximo ou de mínimo e a estimar as coordenadas desses pontos. Ressaltamos que não foi realizada anteriormente nenhuma explicação aos estudantes relacionada aos extremos de uma função. Esperávamos, portanto, que alguma analogia fosse feita com os extremos de funções de uma variável.

A primeira função sugerida foi $f(x,y)=1+x^2+y^2$. Foi solicitado aos estudantes que construíssem o gráfico da função, que experimentassem diferentes intervalos de variação para x e para y e que realizassem a rotação do gráfico em diferentes direções de maneira a identificar se a função possui extremos (máximos ou mínimos).

Pela análise dos relatórios dos estudantes, observamos que todos os grupos identificaram que essa função possui um extremo que é um ponto mínimo. Na Figura 34 está representado o gráfico construído pelo grupo D9 para essa exploração.

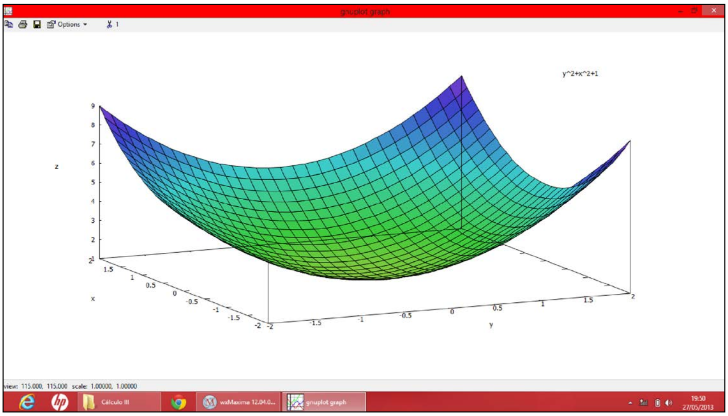


FIGURA 34 - Esboço do gráfico de $f(x,y)=1+x^2+y^2$
Fonte: Produção do Grupo D9

Os relatos dos estudantes apresentados a seguir evidenciam essa percepção:

> Para essa função, independentemente dos valores colocados para *x* e *y*, a superfície apresentada no gráfico é a mesma. A função possui extremo relativo mínimo. (GRUPO D2)

> No gráfico representado, visualizamos o ponto mínimo da função, mesmo mudando os intervalos. (GRUPO D8)

A visualização do gráfico possibilitou aos estudantes identificarem o extremo dessa função e classificá-lo de modo informal como sendo um mínimo relativo. Foi também pedida uma estimativa das coordenadas do extremo identificado. Os grupos concluíram que a função possui o ponto mínimo para $x = 0$ e $y = 0$, e substituindo esses valores na expressão da função, determinaram as coordenadas $(0,0,1)$ do extremo identificado visualmente. Apresentamos a seguir as imagens obtidas pelo Grupo D7.

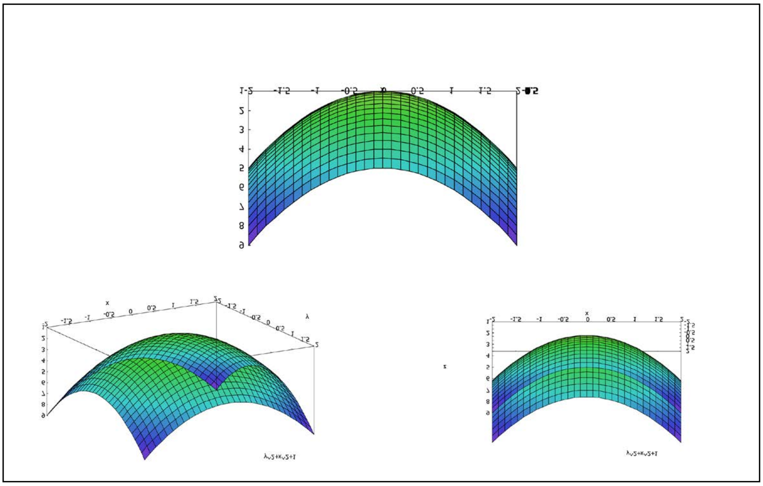


FIGURA 35 - Sequência da visualização do gráfico de $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$
Fonte: Produção do Grupo D7

Alguns grupos utilizaram o termo “concavidade” para expressar a posição do gráfico de $f(x, y)$. Acreditamos que utilizaram esse termo, associando a visualização obtida na Figura 35 ao gráfico de uma função do segundo grau, fazendo a transferência de um termo usado no cálculo de uma variável para uma situação semelhante no cálculo de duas variáveis. Esse fato pode ser constatado no relato dos grupos D1 e D5. Se por um lado podemos interpretar como algo positivo no que diz respeito à transição interna do cálculo, deve ser ressaltado o cuidado para que não fique a ideia de que tudo que é válido no cálculo de uma variável tem correspondente no cálculo de duas variáveis. Alves (2011) aponta como um dos aspectos a serem considerados na transição interna é que há, por exemplo, regras operatórias do cálculo de uma variável que não são válidas no cálculo de duas variáveis. Ainda com relação ao uso do termo concavidade, observamos que estranhamente alguns estudantes disseram que a concavidade estava voltada para baixo, o que contraria o aspecto do gráfico observado. No entanto identificaram corretamente o ponto de mínimo. Não temos uma interpretação da razão disso ter acontecido nesses casos.

> O gráfico gerado é de função com ponto mínimo, com concavidade voltada para baixo. Com valor mínimo = 1 ponto mínimo (0,0). (GRUPO D1)

> O gráfico possui valor mínimo, pois sua concavidade está voltada para baixo. Todo valor de *f (x,y)* será maior ou igual a 1, pois é o ponto mínimo. (GRUPO D5)

A estimativa das coordenadas do ponto motivou a exploração e a interação entre os estudantes. A função foi escolhida como a primeira a ser explorada por ter uma boa visualização no MAXIMA, possibilitando a estimativa das coordenadas de x e de y pelo exame da imagem do gráfico, o que não é tão evidente para a coordenada de z. Os estudantes recorreram à mídia lápis-papel para determinação dessa coordenada, evidenciando que as abordagens gráficas e algébricas e o uso de diferentes mídias complementam-se na produção do conhecimento (VILLARREAL, 1999; BORBA e VILLARREAL, 2005). Apresentamos os registros dos grupos D2 e D4.

> O ponto mínimo tem coordenadas (0,0,1).
> $f(x,y)=1+0^2+0^2=1$ (GRUPO D2)
>
> Sim, notamos que o extremo mínimo se encontra nos pontos (0,0) *x* e *y* respectivamente, ao usar a fórmula indicada pela letra "a" encontramos z = 1, portanto as coordenadas são (0,0,1). (GRUPO D4)

Essa atividade mostra que a abordagem visual realizada antes da apresentação do tema na forma "tradicional" possibilitou aos estudantes manipularem livremente o objeto matemático para formularem a conjectura de que a função $f(x,y)=1+x^2+y^2$ possui um extremo relativo. A mídia informática potencializa os recursos visuais e a interação dos participantes com as imagens obtidas e modificadas. "A informática salienta a componente visual da matemática, alterando o status da visualização na Educação Matemática" (BORBA e VILLARREAL, 2005, p.86). No caso dessa atividade, essa interação ajudou na produção das ideias matemáticas iniciais sobre extremos de uma função de duas variáveis, o que está de acordo com o que afirma Machado (2008):

> A visualização matemática, através da tela do computador, dá possibilidade de se elaborar um conjunto de argumentos (conjecturas) e ainda utilizá-los para resolver problemas, permitindo aos estudantes construir e relacionar as várias representações da informação e construir os conceitos matemáticos. (MACHADO, 2008, p.107)

A segunda função explorada com os mesmos objetivos foi $g(x,y)=-x^2+2x-y^2+4y-3$. Diferentemente daquela registrada na primeira, nessa função a estimativa dos extremos não fica tão evidente apenas visualmente. Exatamente por isso ela foi escolhida para que os estudantes percebessem a necessidade de outro recurso além do visual para determinação dos extremos de funções de duas variáveis. Os estudantes exploraram essa função de modo semelhante ao usado para a função $f(x, y)$. Construíram o gráfico de $g(x, y)$ com diferentes intervalos de variação de x e de y, movimentando-o em diferentes direções.

Como esperado, os estudantes tiveram dificuldades em estimar o extremo da função $g(x, y)$, utilizando a visualização de seu gráfico. Na Figura 36[27], apresentamos a construção do Grupo D1. Percebe-se que é difícil estimar com precisão o extremo dessa função apenas visualmente.

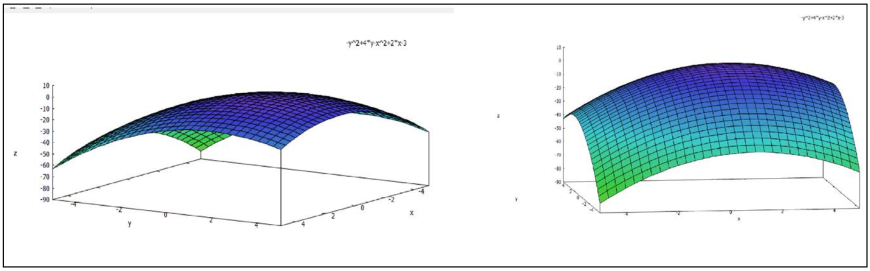


FIGURA 36 - Construção do gráfico de $g(x, y)$ pelo Grupo D1
Fonte: Produção do Grupo D1

As dificuldades na estimativa das coordenadas do extremo são expressadas pelos estudantes em seus relatórios:

> Essa função possui ponto máximo, porém não conseguimos estimar com precisão qual é o valor deste, apenas perceber que está entre 0 e 2. (GRUPO D2)
>
> Observamos que é mais difícil encontrar os extremos. (GRUPO D9)

Entendemos que essa dificuldade encontrada pelos estudantes não constituiu obstáculo ao desenvolvimento da atividade e a produção das ideias matemáticas. Pelo contrário, proporcionou um momento de

[27] As construções dos demais grupos são semelhantes a esta, mudando apenas os intervalos das variáveis x e y.

discussão e debate entre os estudantes, que perceberam a necessidade de utilizar outras estratégias para encontrar as coordenadas do extremo da função $g(x, y)$.

Dessa maneira, como previsto na sequência dessa atividade, nesse momento foram definidos os máximos e os mínimos locais de uma função de duas variáveis. Essa definição foi feita a partir de um diálogo entre o professor-pesquisador e os estudantes, procurando resgatar o observado nos gráficos construídos e também as justificativas dadas pelos estudantes para terem considerado aqueles pontos como extremos. Na verdade, as percepções dos estudantes tinham pontos em comum com a definição matemática formal que foi apresentada:

- A função $f(x, y)$ tem um *máximo local* no ponto P_0 se $f(P_0) \geq f(P)$ para todos os pontos P próximos a P_0.
- A função $f(x, y)$ tem um *mínimo local* no ponto P_0 se $f(P_0) \leq f(P)$ para todos os pontos P próximos a P_0.

Assim, na sequência da atividade, foi proposto:

a) Com o auxílio do MAXIMA, calcule valores da função $f(x, y)$ nos extremos relativos estimados e em pontos das vizinhanças desses extremos. Compare os valores. b) Faça o mesmo com a função $g(x, y)$.

O objetivo dessa parte da atividade era instigar os estudantes a verificarem, de alguma maneira, suas conjecturas sobre os extremos que foram estimados visualmente. Das discussões entre os participantes, destacamos as reflexões a respeito das potencialidades e das limitações das imagens geradas pelo *software* e das informações que podem ser obtidas por meio delas. Ressaltamos as possibilidades de produção de conhecimento matemático a partir desses contextos de discussão a respeito das ideias matemáticas que emergem da exploração feita por meio do *software*. Exemplificamos com a ideia produzida pelos estudantes, antes da apresentação da definição formal, de que os pontos extremos são aqueles em que a função assume o maior (ou menor) valor se comparada com outros pontos próximos. Tal ideia é evidenciada pela fala: “todo valor de *f (x,y)* será maior ou igual a 1, pois é o ponto mínimo” (GRUPO D5).

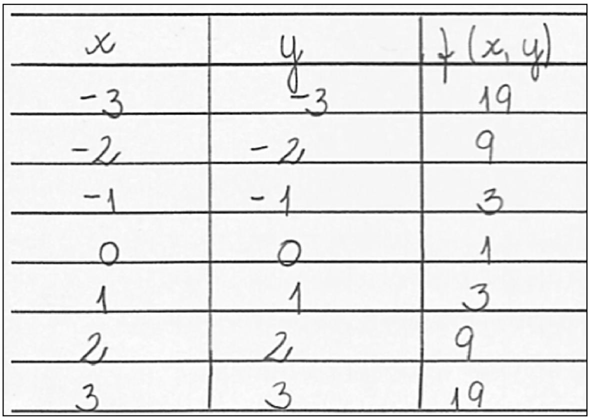
Com suporte na visualização, cada grupo construiu seu próprio caminho para estimar os valores extremos de $f(x,y)=1+x^2+y^2$ como, por exemplo, construindo tabelas com valores aproximados para as coordenadas do ponto (x,y) e calculando o valor de $f(x,y)$. Ou apenas pela visualização do gráfico gerado pelo MAXIMA da maneira que definiram no início dessa atividade.

Um exemplo é o Grupo D4 (descrito a seguir 101), que construiu uma tabela iniciando pelo ponto (0,0), estimado como mínimo visualmente. A tabela construída apresenta os valores de *f (x,y)* calculados para esse ponto e para outros escolhidos na vizinhança dele.

x	y	f(x,y)	
0	0	1	Como o ponto mínimo é 1, logo o menor valor que poderá ser encontrado será 1.
1	3	11	
2	2	9	
-1	-4	18	
-2	-3	14	
2	-2	9	

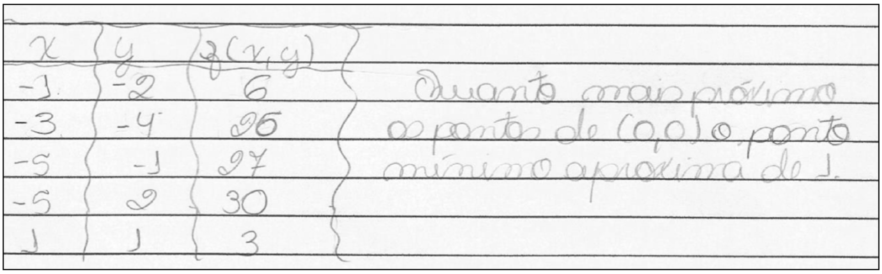
Como o ponto mínimo da função é 1, logo o menor valor que poderá ser encontrado será 1. (GRUPO D4)

Da mesma forma, outros grupos também construíram tabelas para estimar o extremo. Alguns indicaram corretamente o extremo e outros, não, o que enfatiza a necessidade de estimular outras abordagens, pois acreditamos que, para alguns grupos, a exploração visual não foi suficiente para encontrarem o extremo da função $f(x, y)$ (Figuras 37 e 38).



x	y	f(x, y)
-3	-3	19
-2	-2	9
-1	-1	3
0	0	1
1	1	3
2	2	9
3	3	19

FIGURA 37 - Resultados apresentados pelo Grupo D3
Fonte: Produção do Grupo D3



x	y	f(x, y)
-1	-2	6
-3	-4	26
-5	-1	27
-5	2	30
1	1	3

Quanto mais próximo os pontos de (0,0) o ponto mínimo aproxima de 1.

FIGURA 38 - Resultados apresentados pelo Grupo D7
Fonte: Produção do Grupo D7

> Quanto mais próximos os pontos de (0,0), o ponto mínimo aproxima de 1. (GRUPO D7)

No caso da função $g(x, y)$, a visualização não deixou evidente o ponto e mesmo realizando cálculos de valores numéricos da função, alguns grupos não conseguiram fazer uma boa estimativa das coordenadas. A seguir mostramos alguns resultados: alguns grupos utilizaram o MAXIMA para realizar os cálculos (Figura 39) e construir uma tabela e outros utilizaram a mídia lápis-papel.

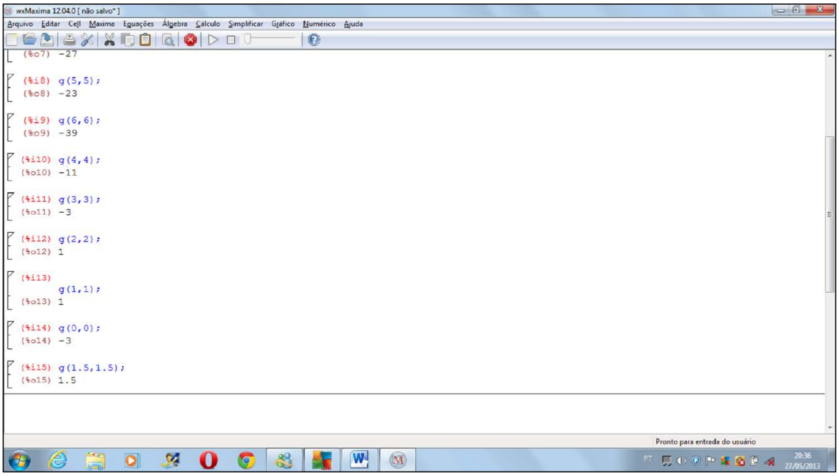


FIGURA 39 - Sequência do cálculo dos valores de $g(x, y)$ realizada pelo Grupo D1
Fonte: Produção do Grupo D1

x	y	g(x,y)
1	1	1
0,5	0,5	-0,5
1,5	1,5	1,5
1,6	1,6	1,48
1,2	1,2	1,32
1,4	1,4	1,48

A função g(x) conforme as estimativas ao lado possui valor máximo igual a 1,5.

FIGURA 40 - Estimativa realizada pelo Grupo D2
Fonte: Produção do Grupo D2

A função $g(x,y)$, conforme as estimativas ao lado, possui valor máximo igual a 1,5. (GRUPO D2)

x	y	g(x,y)
−2	−1	−16
−1	0	−6
0	1	0
1	2	2
2	3	0
3	4	−6
4	5	−16

FIGURA 41 - Estimativa realizada pelo Grupo D3
Fonte: Produção do Grupo D3

x	y	g(x,y)	
2	5	-8	
3	4	-6	
2	2	1	
3	6	-18	
2	1	0	
1	2	2	
1	3	1	

FIGURA 42 - Estimativa realizada pelo Grupo D4
Fonte: Produção do Grupo D4

> O gráfico da função acima[28] possui valor máximo, pois sua concavidade é voltada para cima. Encontramos as coordenadas x e y, onde $x = 1$ e $y = 2$. Ao substituir na função acima, encontramos a coordenada $z = 2$. Coordenadas (1,2,2). Ponto máximo = 2, onde todo valor de $f(x, y)$ será menor ou igual ao ponto máximo. (GRUPO D5)

[28] Referência à função $g(x, y)$.

Para o Grupo D9:

Observamos que é mais difícil encontrar os extremos. Então, modificamos os intervalos e observamos o seguinte resultado:

x	y	g(x, y)
2	3	0
3	4	-6
4	5	-16
5	6	-30
6	7	-48

Encontrando o ponto máximo:

x	y	g(x, y)
1	1	1
2	2	1
1,5	1,5	1,5

Ou seja, estimamos que o ponto máximo é 1,5

> Observamos que é mais difícil encontrar os extremos. Então, modificamos os intervalo e observamos o seguinte resultado [...] Ou seja, estimamos que o ponto máximo é 1,5." (GRUPO D9)

Ao final dessa aula, observamos que o uso da visualização mostrou-se útil para investigar os extremos das funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$. Pelos relatos acima, verificamos que alguns grupos estimaram corretamente os extremos e outros não.

A dinâmica utilizada estimulou as interações entre os participantes e a postura mais questionadora dos estudantes a respeito dos conceitos estudados. Os estudantes não se limitaram ao que estava proposto no roteiro da atividade e levantaram outros questionamentos. Um deles foi:

“Toda função de duas variáveis possui apenas um máximo ou um mínimo?”.

Consideramos positiva a participação e interação dos estudantes durante a realização dessa parte da atividade. Acreditamos que o ambiente criado propiciou a produção do conhecimento de acordo com o constructo seres-humanos-com-mídia (BORBA e VILLARREAL, 2005), onde o conhecimento é produzido na presença de determinada mídia. Nesse caso, existiu a interação entre as diferentes mídias: oralidade, escrita e informática.

A segunda e a terceira partes dessa atividade foram realizadas no terceiro encontro. A segunda parte teve o objetivo de explorar as características das derivadas parciais nos extremos de uma função de duas variáveis. Para tanto, retomamos conceitos que foram construídos e trabalhados durante a realização do terceiro grupo de atividades, que tratou da interpretação geométrica das derivadas parciais. Para esse propósito, apresentamos o seguinte roteiro:

> Nos extremos locais de funções de duas variáveis, as derivadas parciais têm características especiais.
> Para elaborarmos conjecturas a respeito das derivadas parciais nos extremos relativos de funções de duas variáveis, vamos retomar os conceitos trabalhados na atividade 4 onde interpretamos o significado geométrico das derivadas parciais.
> Discuta com seu grupo o que representa o valor numérico da derivada parcial de uma função de duas variáveis aplicada em determinado ponto.
> Escreva o que concluíram.

Percebemos que muitos grupos conseguiram concluir que a derivada parcial em determinado ponto $P(x,y)$ é a taxa de variação da função no ponto em relação a x ou a y, mantendo-se x ou y constante.

Ressaltamos que os estudantes tiveram receio em expressar-se quanto à escrita formal, mas foram orientados a registrar suas observações utilizando a linguagem informal. Entendemos que essa opção favoreceu a expressão do pensamento dos estudantes.

> É a taxa de variação em ralação ao ponto dado (x ou y) onde consideramos x ou y apenas como variável enquanto as outras variáveis se mantêm fixadas. (GRUPO D8)

Pudemos observar, durante o desenvolvimento da atividade, que muitos grupos conseguiram associar a derivada parcial com a inclinação da reta tangente à curva obtida como interseção da superfície com planos do tipo x = constante ou y = constante. Mas tiveram dificuldade em escrever as suas conclusões e acabaram apresentando mais escritas relacionadas à taxa de variação:

> Representa qual a taxa de variação de crescimento ou decrescimento no ponto que foi indicado. (GRUPO D1)
>
> É o ponto onde uma reta partindo do ponto (x,y) tangencia a superfície de uma função. Representa qual a taxa de variação de crescimento ou decrescimento no ponto que foi indicado.(GRUPO D5)
>
> Representa a variação que tem nas duas variáveis no determinado ponto. De acordo com o valor, conseguimos identificar se a reta é crescente ou decrescente, de acordo com o coeficiente angular. (GRUPO D7)
>
> Representa a taxa de variação de crescimento ou decrescimento no ponto indicado. (GRUPO D10)

A dificuldade em expressar-se corretamente usando a linguagem matemática também foi relatada por Villarreall (1999) em estudo realizado envolvendo derivadas. Relata que as estudantes não utilizaram notação matemática para escrever os enunciados, mas sim a linguagem comum. Porém o fato de eles terem conseguido relacionar uma função e sua derivada, falar e escrever sobre essas relações revela a construção de significados matemáticos (VILLARREAL, 1999, p. 318). Para a autora, muitas das escritas dos estudantes, que do ponto de vista do rigor matemático seriam consideradas incompletas e inexatas, expressam ideias matemáticas. Assim entendemos que ideias matemáticas acerca do conceito e interpretação geométrica das derivadas parciais estão expressas nas falas dos estudantes, mesmo que não possam ser consideradas rigorosamente corretas do ponto de vista da linguagem matemática.

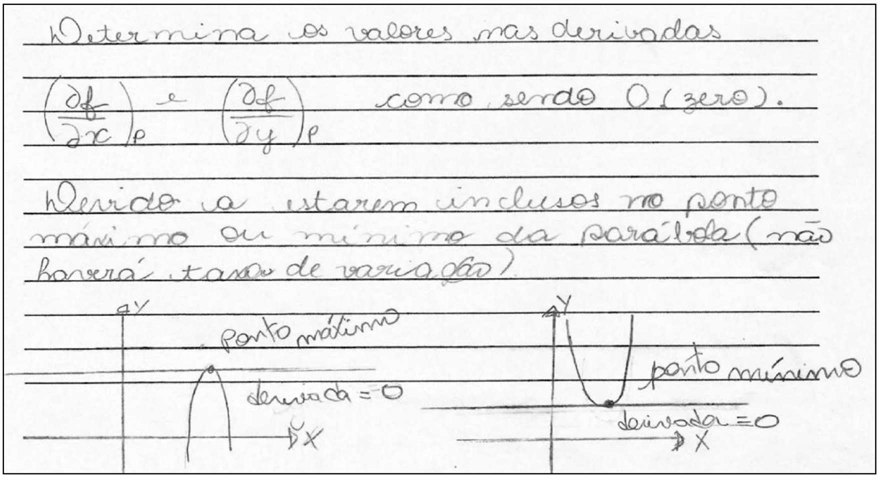
Com o objetivo de estimular os estudantes a pensarem sobre um possível valor para a derivada parcial nos extremos, foi proposta a questão:

"Se P é um ponto máximo local de $f(x,y)$, que valor você acha que deve ter $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P$? E a $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P$? Justifique suas respostas."

A maioria dos estudantes conseguiu concluir que as derivadas parciais de primeira ordem de uma função $f(x,y)$ são nulas nos extremos, o que caracteriza uma ideia matemática produzida: nos extremos, as tangentes às curvas de interseção da superfície com planos do tipo x = constante ou y = constante são horizontais e por isso as derivadas parciais são nulas. Verificamos que os estudantes associaram a derivada parcial de primeira ordem de uma função de duas variáveis com o conceito e a interpretação geométrica da derivada ordinária de primeira ordem de uma função de uma variável em um determinado ponto. Identificamos, assim, um elemento da transição do cálculo a uma variável para o cálculo a várias variáveis. O relato do Grupo D7 exemplifica:

> "Se P é um ponto máximo significa que não existe taxa de variação, uma vez que, tanto para o x quanto para o y, a reta estará sempre paralela." (GRUPO D7)

O Grupo D10 explicou em sua concepção o que seriam as derivadas parciais no ponto P e ainda exemplificou graficamente o seu significado comparando com os extremos de uma função de uma variável. Nessa descrição, temos indícios da produção do conhecimento acerca da interpretação geométrica das derivadas parciais, que foi desenvolvido no terceiro grupo de atividades. Acreditamos que os estudantes relacionaram o que produziram naquele momento com essa parte da atividade. Fica evidente a transição de conceitos do cálculo de uma variável que foram estendidos para os correspondentes no cálculo de várias variáveis.



Determina os valores nas derivadas $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P$ como sendo 0 (zero). Devido a estarem inclusos no ponto máximo ou mínimo da parábola (não haverá taxa de variação)[...]

Identificamos nesses excertos (e nos da maioria dos estudantes) indícios de construção de conhecimento acerca das características do valor das derivadas parciais em extremos de funções de duas variáveis, identificando essas derivadas parciais com o conceito de taxa de variação e de coeficiente angular da reta tangente.

Entendemos que a transição de conceitos do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis aconteceu de forma natural em momentos nos quais os estudantes foram estimulados a experimentar, conjecturar e discutir sobre aspectos matemáticos das funções estudadas. Levy (1993, p. 40) afirma que "quanto mais ativamente uma pessoa participar da aquisição de um conhecimento, mais ela irá integrar e reter aquilo que aprender". Atribuímos a facilidade observada para a transição nesse momento à forma como os estudantes atuaram e à forma como os conhecimentos considerados pré-requisitos foram produzidos no coletivo de seres-humanos-com-mídias em etapas anteriores.

Na parte seguinte da atividade, foram apresentadas, de modo teórico, as condições para calcular o ponto crítico de uma função de duas variáveis. Isso apenas sistematizou as descobertas já expressas pelos alunos anteriormente. Abaixo o texto desse item na íntegra, da forma que foi disponibilizada aos estudantes após a realização da atividade.

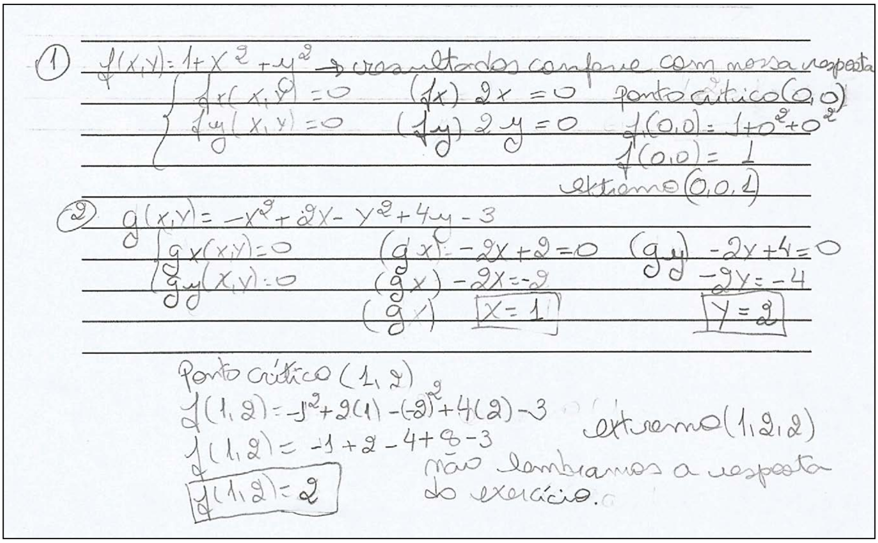
> Se uma função $f(x,y)$ tem um máximo ou mínimo locais em $P(a,b)$ e as derivadas parciais de primeira ordem de $f(x,y)$ existem nesses pontos, então $f_x(a,b)=0$ e $f_y(a,b)=0$. Nesse caso, o ponto $P(a,b)$ é chamado ponto crítico. Mas, como no cálculo a uma variável, nem todos os pontos críticos correspondem a um máximo ou mínimo. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local ou nenhum deles.
> Então para determinar os pontos críticos de uma função de duas variáveis, devemos examinar as derivadas parciais de $f(x,y)$. Se elas estão definidas qualquer x e qualquer y, encontraremos os pontos críticos igualando-as a zero e resolvendo o sistema correspondente.
> Isso pode ser feito também usando os recursos de cálculo do MAXIMA com os comando **diff** (para cálculo das derivadas parciais) e **solve** (para a resolução do sistema de equações).
> Vamos retomar as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ estudadas e determinar os pontos críticos. Vejam se eles coincidem com os valores estimados anteriormente por vocês.

De posse da ferramenta matemática necessária, os estudantes foram convidados a verificar novamente suas conjecturas sobre as coordenadas dos extremos das duas funções estudadas. Devido ao fato de essas estimativas terem sido realizadas por muitos grupos no encontro anterior, alguns estudantes não se lembravam dos valores que eles mesmos estimaram.

Alguns grupos utilizaram o comando SOLVE do MAXIMA para resolver as equações, obtidas igualando as derivadas parciais a zero, mas, como os cálculos eram simples, a maioria utilizou o ambiente lápis-papel.

Abaixo a descrição de alguns grupos.

Grupo D5:



① $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ → resultados conforme com nossa resposta

$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$ $(f_x)\ 2x = 0$ $(f_y)\ 2y = 0$

ponto crítico $(0,0)$

$f(0,0) = 1 + 0^2 + 0^2$

$f(0,0) = 1$

extremo $(0,0,1)$

② $g(x,y) = -x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$

$\begin{cases} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \end{cases}$

$(g_x)\ -2x + 2 = 0$

$(g_x)\ -2x = -2$

$(g_x)\ \boxed{x = 1}$

$(g_y)\ -2x + 4 = 0$

$-2y = -4$

$\boxed{y = 2}$

Ponto crítico $(1,2)$

$f(1,2) = -1^2 + 2(1) - (-2)^2 + 4(2) - 3$

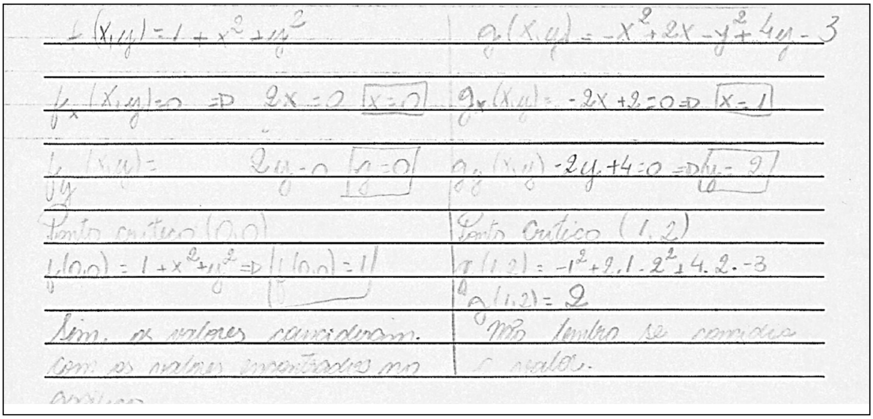
$f(1,2) = -1 + 2 - 4 + 8 - 3$

$\boxed{f(1,2) = 2}$

extremo $(1,2,2)$

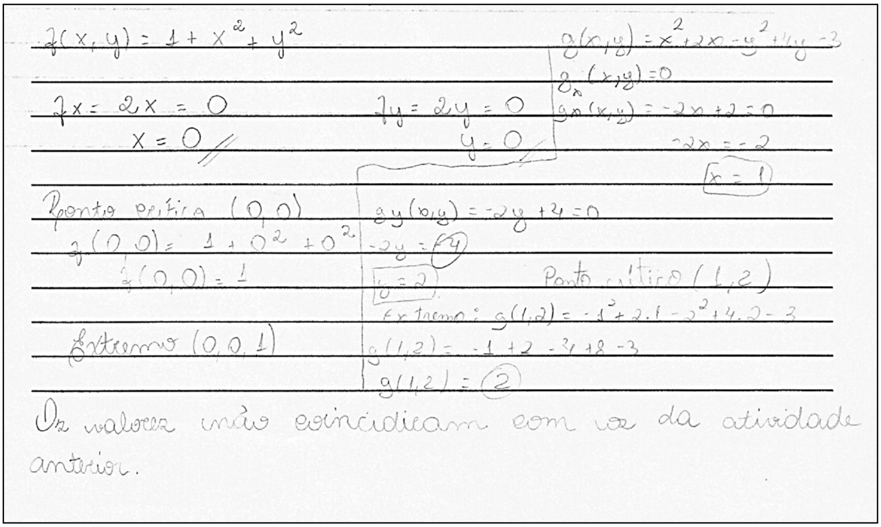
não lembramos a resposta do exercício.

Grupo D8:



$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$	$g(x,y) = -x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$
$f_x(x,y) = 0 \Rightarrow 2x = 0\ \boxed{x = 0}$	$g_x(x,y) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$
$f_y(x,y) = 2y = 0\ \boxed{y = 0}$	$g_y(x,y)\ -2y + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 2}$
Ponto crítico $(0,0)$	Ponto crítico $(1,2)$
$f(0,0) = 1 + x^2 + y^2 \Rightarrow \boxed{f(0,0) = 1}$	$g(1,2) = -1^2 + 2.1 - 2^2 + 4.2 - 3$
	$g(1,2) = 2$
Sim. os valores coincidiram com os valores encontrados no anterior	Não lembro se coincide o valor.

Grupo D9:



[Os valores não coincidiram com os da atividade anterior.]

Os resultados, tendo coincidido ou não com as estimativas feitas anteriormente, foram discutidos com os alunos, mostrando a importância de utilizar os conceitos teóricos para auxiliar nas conclusões, indo além da aparência da imagem visual. Entendemos que a visualização foi importante para dar significado aos conceitos teóricos apresentados, porém deve ser entendida pelos estudantes como um recurso a mais, que tem que ser avaliado no que diz respeito às suas potencialidades e limitações (como já mencionado nesse texto anteriormente).

Ao integrar as diferentes mídias no desenvolvimento desse grupo de atividades, percebemos que todas elas tiveram um importante papel na produção do conhecimento e que, quando incorporadas pelos atores humanos, constituiu-se em um coletivo de seres-humanos-com-mídias. Cada mídia teve importância em determinado momento: as tecnologias informáticas potencializando a visualização em uma exploração inicial do tema, a oralidade que esteve presente durante as discussões e os diálogos entre os atores humanos desse coletivo e, por fim, a escrita, uma das mídias mais presentes no meio educacional. Nessas atividades, a escrita foi utilizada para os estudantes expressarem seu pensamento e também para realizarem os cálculos dos extremos das funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ que, posteriormente, compararam com os resultados obtidos na fase inicial da atividade, onde estimaram esses extremos usando apenas os recursos visuais do MAXIMA. Villarreal (1999) expõe sobre a importância da mídia lápis-papel, bem como da incorporação das tecnologias computacionais no coletivo pensante.

> Se a mídia lápis e papel se mostra como um objeto que está mediando o pensamento humano, o computador constitui-se, então, em uma nova ferramenta que transforma e, ao mesmo tempo, faz parte do pensamento humano, integrado também, um coletivo pensante homens-coisas. (VILLARREAL, 1999, p. 325)

Nesse sentido, a produção do conhecimento é qualitativamente diferente na presença de determinada mídia. Borba e Villarreal (2005, p. 5) afirmam que "uma nova tecnologia da inteligência resulta em um novo coletivo, que produz novos conhecimentos que é qualitativamente diferente do conhecimento produzido por outros coletivos".

Assim, nessa atividade, os estudantes exploraram, conjecturaram ideias matemáticas acerca dos extremos de funções de duas variáveis através dos recursos visuais do MAXIMA que, posteriormente, foram confrontados com os dados obtidos através dos conhecimentos teóricos dos pontos críticos de uma função de duas variáveis.

Essa forma de abordagem que foi utilizada no desenvolvimento das atividades enfatizou a componente visual da mídia informática na produção do conhecimento. Acreditamos que a informática em conjunto com as outras mídias, como a escrita e a oralidade, alterou qualitativamente o pensamento e a forma da produção do conhecimento matemático.

Na sequência da atividade, foi proposto aos estudantes:

> • Considere a função $h(x,y)=x^2-y^2$. Essa função tem um ponto crítico. Determine esse ponto crítico.

• Esboce o gráfico de $h(x, y)$ e observe as características da função no ponto crítico. Para isso, faça a rotação da função procurando observar o gráfico em diferentes direções. Esse ponto é de máximo? É de mínimo? Explique.

Todos os grupos conseguiram encontrar o ponto crítico dessa função através dos conhecimentos produzidos na etapa anterior, utilizando as derivadas parciais. Na Figura 43, o gráfico de $h(x, y) = x^2 - y^2$ obtido pelos estudantes que, mesmo não sendo inicialmente solicitado, foi a primeira ação realizada pelos grupos.

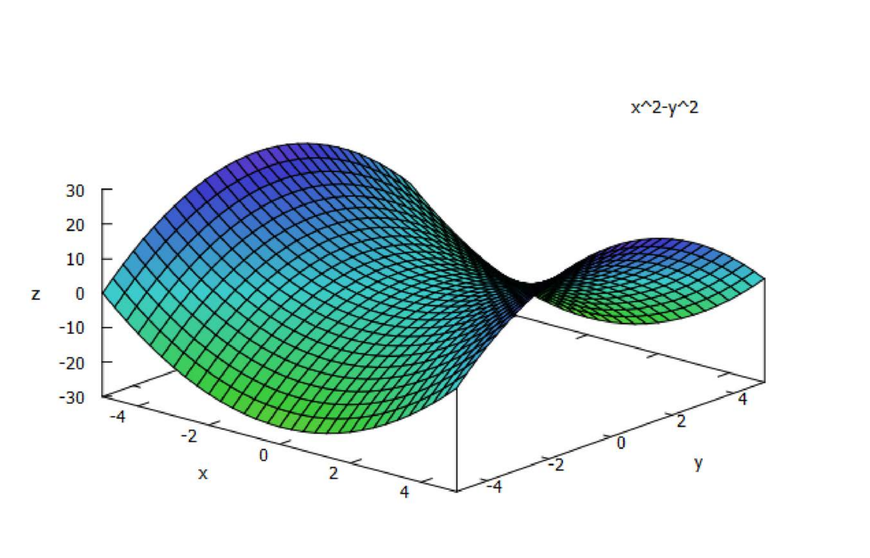
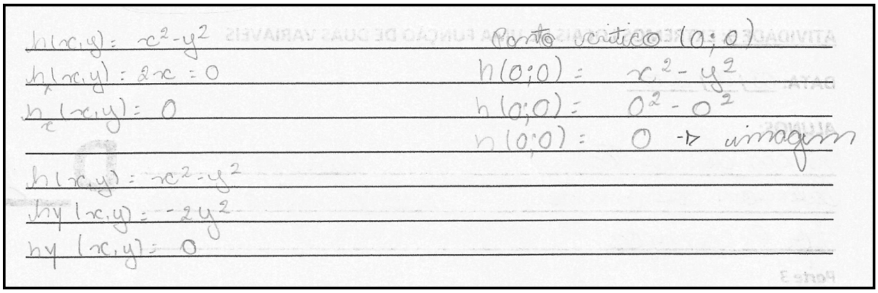


FIGURA 43 - Gráfico de $h(x, y) = x^2 - y^2$

Fonte: Produção dos estudantes

Grupo D1:


$h(x,y) = x^2 - y^2$ ponto crítico $(0;0)$
$h_x(x,y) : 2x = 0$ $h(0;0) = x^2 - y^2$
$h_x(x,y) = 0$ $h(0;0) = 0^2 - 0^2$
$h(0;0) = 0 \rightarrow$ imagem
$h(x,y) = x^2 = y^2$
$h_y(x,y) = -2y^2$
$h_y(x,y) = 0$

A escolha de $h(x, y) = x^2 - y^2$ se deu pelo fato de essa função possuir um ponto de sela. Até esse momento, esse termo não havia sido abordado nas atividades. O estudo dessa função gerou grande discussão e dúvidas por parte dos estudantes. Esse fato é demonstrado nos relatos a seguir.

> Analisando o gráfico no eixo *x*, encontramos o ponto mínimo, já analisando o gráfico no eixo *y*, encontramos o ponto máximo. De acordo com a rotação do gráfico, visualiza o ponto mínimo e ponto máximo. (GRUPO D7)

> Com a rotação, vemos o ponto máximo e mínimo, onde em "*x*" vemos o ponto mínimo e em "*y*" o ponto máximo. (GRUPO D8)

Devido ao término da aula, não foi possível concluir e aprofundar no estudo de $h(x, y) = x^2 - y^2$. Ficaram muitas dúvidas e curiosidades quanto ao ponto crítico dessa função.

No quarto encontro, foi realizada a última parte dessa atividade. O objetivo dessa aula foi de formalizar o estudo dos extremos de funções de duas variáveis, principalmente no que se refere ao teste das derivadas parciais de segunda ordem. Para isso, retomamos as discussões e as dúvidas originadas na aula anterior, referentes à função $h(x, y) = x^2 - y^2$. Apresentamos aos estudantes o teste da derivada segunda para classificação dos pontos críticos de funções de duas variáveis e pedimos que eles retomassem as funções estudadas aplicando o teste nos pontos críticos determinados.

Observamos que a maioria dos estudantes conseguiu utilizar o teste e comparar com os resultados obtidos nas etapas anteriores. Nesse momento, perceberam que uma função pode ter um ponto crítico que não é máximo e nem mínimo. A seguir a descrição do grupo D10 que exemplifica a sequência utilizada por quase todos os estudantes.

$f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

$f_x = 2x \qquad f_y = 2y$

$x = 0 \qquad y = 0$

$f(0,0) = 1 + 0^2 + 0^2$

$f(0,0) = 1$

extremo $= (0,0,1)$

$f_{xx} = 2 \qquad f_{yy} = 2$

$f_{xy} = 0$

$D = 2 \cdot 2 - 0 = 4$

$D > 0 \rightsquigarrow$ mínimo local

$g(x,y) = -x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$

$g_x = -2x + 2 \qquad g_y = -2y + 4$

$x = 1 \qquad y = 2$

$g(1,2) = -1^2 + 2 \cdot 1 - 2^2 + 4 \cdot 2 - 3$

$g(1,2) = 2$

extremo $= (1,2,2)$

$g_{xx} = -2 \qquad g_{yy} = -2$

$g_{xy} = 0$

$D = -2 \cdot -2 - 0 = 4$

$D > 0 \rightsquigarrow$ maximo local

$h(x,y) = x^2 - y^2$

$h_x = 2x \qquad h_y = -2y$

$x = 0 \qquad y = 0$

$h(0,0) = 0^2 - 0^2 = 0$

extremo $= (0,0,0)$

$h_{xx} = 2 \qquad h_{yy} = -2$

$h_{xy} = 0$

$D = -2 \cdot 2 - 0 = -4$

$D < 0$ não é mínimo local nem máximo local

A maneira como os estudantes se expressaram a respeito do ponto (0,0) decorre da forma como o caso do D negativo foi descrito no teste: Se $D < 0$, então $f(a,b)$ não é mínimo local nem máximo local.

Em seguida foi pedido aos estudantes para construir o gráfico, explorar, calcular e analisar os pontos críticos das seguintes funções:

a) $f(x,y) = x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

Apresentamos nesse texto a atividade tal qual foi realizada. No entanto, apontamos uma falha que precisa ser corrigida em atividades futuras. O ponto de sela de fato é um ponto que não pode ser caracterizado como de máximo ou de mínimo. Porém ele tem características peculiares: pode ser entendido como de máximo em uma direção e mínimo em outra. Isso foi percebido pelos estudantes e deveria ter sido enfatizado. Evidenciam essa percepção, por exemplo, os relatos dos grupos D7 e D8 a respeito do ponto crítico da função $h(x, y) = x^2 - y^2$. Certamente os alunos tinham imagens que mostravam isso. Também deveria ter sido enfatizado que o valor $D < 0$ no teste da derivada segunda caracteriza o ponto de sela.

Finalizamos essa descrição e a análise das atividades realizadas, ponderando sobre os resultados obtidos. Desenvolvemos atividades com objetivo de que fosse produzido conhecimento em um coletivo de seres-humanos-com-mídias. Constituímos esse coletivo com atores humanos (alunos e professor) e não humanos (mídias). Como mídias, consideramos a oralidade, escrita e tecnologia, com uso do *software* MAXIMA. As atividades foram estruturadas estimulando a investigação acerca de funções de duas variáveis. Buscaram, sobretudo, oportunizar a visualização e a transição do cálculo de uma para duas variáveis.

Concordamos com Borba e Villareal (2005) quando afirmam que o conhecimento é sempre produzido na presença de determinada mídia e que essa pode reorganizar o pensamento no coletivo. Interpretamos que os recursos das diferentes mídias, qualitativamente diferentes, de fato provocaram essa reorganização. No caso do *software* MAXIMA, as possibilidades de visualização, bem como as facilidades de movimentação entre diferentes representações (gráfica e algébrica) determinaram a forma como foram produzidas ideias matemáticas sobre domínio, curvas de nível, interpretação geométrica das derivadas parciais e sobre extremos de funções de duas variáveis.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Essa pesquisa está inserida na grande área de pesquisa da Educação Matemática, especificamente no ensino e aprendizagem de Cálculo. Ainda são muitos os desafios enfrentados por professores e estudantes em nossas universidades, como, por exemplo, os altos índices de reprovação e desistências por parte dos estudantes. Essa problemática tem despertado o interesse de muitos pesquisadores em investigar suas causas e indicar possíveis alternativas para a superação desses problemas. Em muitas dessas pesquisas, a abordagem realizada refere-se ao cálculo de uma variável.

Assim, vivenciando, em nossa experiência profissional, entraves tanto no ensino quanto na aprendizagem no contexto do cálculo de duas variáveis, decidimos investigar aspectos relacionados a esse tema procurando responder à questão de investigação: *Que ideias matemáticas acerca de funções de duas variáveis são produzidas em um coletivo de seres-humanos-com-mídias?*

A opção de nos referenciarmos nesse constructo teórico, descrito por Borba e Villarreal (2005), foi motivada pelo fato de concordarmos com os autores que o conhecimento é sempre produzido na presença de determinada mídia e, dessa forma, a constituição do coletivo seres-humanos-com-mídias propicia a construção de conhecimento. Para a mídia informática, optamos pela utilização do *software* MAXIMA, que possibilitou a exploração de conceitos do cálculo de funções de duas variáveis. Optamos por olhar para as ideias matemáticas produzidas pelos estudantes no coletivo por entendermos que essas ideias se caracterizam como conhecimento matemático produzido e se constituem como base, como início de uma caminhada na direção da abordagem formal dos conceitos.

Para atingir nossos objetivos, propusemos sequências de atividades nas quais, em um primeiro momento, os estudantes exploraram situações com o uso do MAXIMA para depois serem feitas a introdução e a formalização dos conceitos. Essa proposta oportunizou aos estudantes espaços de discussão e reflexão, constituindo ambientes de aprendizagem diferentes do que esses estudantes estavam acostumados e que, em geral, seguiam os moldes tradicionais nos quais os conceitos matemáticos são apresentados inicialmente para depois os estudantes resolverem exercícios de acordo com exemplos feitos pelo professor. Ressaltamos a importância de utilizarmos estratégias diversificadas para o trabalho em sala de aula e, dessa forma, as abordagens ditas tradicionais também têm seu lugar na escola. Porém procuramos olhar para as oportunidades de utilização das tecnologias para criação de ambientes de aprendizagem nos quais os estudantes tivessem possibilidade de investigar sobre conceitos matemáticos. Um fato que nos motivou a caminhar nessa direção foi a constatação de que, apesar de toda a tecnologia disponível atualmente e de sua inserção em nosso estilo de vida moderno, como, por exemplo, celulares de última geração, *tablets* e outros, percebemos que, em muitos casos, a tecnologia não é utilizada de modo sistemático nos contextos escolares, a despeito das possibilidades que apresenta. E quando utilizada é, muitas vezes, cercada de desconfiança, dúvidas e incertezas quanto aos benefícios de sua utilização.

Ao término da análise dos dados colhidos durante essa pesquisa, temos indícios da produção do conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis nos ambientes de aprendizagem que constituímos como coletivos de seres-humanos-com-mídias. A realização da análise foi orientada por três eixos: a visualização, a transição do cálculo de uma para várias variáveis e o papel das mídias (principalmente do *software* MAXIMA) na produção do conhecimento.

No que diz respeito à visualização, podemos dizer que é uma das principais potencialidades proporcionadas pelas mídias informáticas. A sua importância foi identificada em todas as atividades que desenvolvemos. Como as representações gráficas dos objetos de estudo do cálculo de duas variáveis acontecem no espaço tridimensional, sua exploração é dificultada quando utilizamos apenas a mídia lápis-papel. Essa exploração foi favorecida pela utilização dos recursos do MAXIMA, contribuindo para a formulação de conjecturas e, consequentemente, para a produção do conhecimento. A visualização contribuiu para a produção de ideias matemáticas acerca dos temas abordados nas atividades e essas ideias se fizeram presentes nos registros escritos dos estudantes, nas manifestações orais durante a realização das atividades e nas escolhas e estratégias utilizadas pelos estudantes para a realização das atividades. Dentre essas ideias, já mencionadas no capítulo quatro, destacamos:

> Os gráficos de funções de duas variáveis são superfícies em três dimensões.
> • Um gráfico não muda quando modificamos os intervalos de variação das variáveis independentes, apesar das modificações da aparência do gráfico.
> • O domínio da função determina as possibilidades para o gráfico da função e se caracteriza como uma região do plano para as funções de duas variáveis. E, ainda, que a abordagem algébrica possibilita descrever matematicamente a região do domínio.
> • É importante caracterizar o domínio para explorar uma função.
> • As curvas de nível são cortes na superfície do gráfico de uma função de duas variáveis e essas curvas podem ser projetadas no plano.
> • Os valores numéricos das derivadas parciais aplicadas em um determinado ponto representam a inclinação da reta tangente à curva interseção da superfície com planos do tipo x = constante ou y = constante.
> • Os extremos de funções de duas variáveis se caracterizam como pontos onde a função assume maior valor (ou menor valor) se comparados com outros pontos próximos a eles.
> • As derivadas parciais se anulam nos extremos de funções de duas variáveis.

Todas essas ideias foram produzidas em situações nas quais as imagens obtidas por meio do MAXIMA foram exploradas.

Outro eixo considerado para a análise dos dados foi a transição dos conceitos do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis. A literatura aponta a transição como uma dificuldade, podendo gerar entraves à aprendizagem do cálculo de várias variáveis.

Na nossa proposta de atividades, tivemos o cuidado de resgatar (de modo teórico ou com uso do *software*) conceitos de funções de uma variável que pudessem contribuir para a compreensão de conceitos análogos no cálculo de duas variáveis. Observamos no transcorrer dessa pesquisa que muitos estudantes conseguiram de forma natural estender esses conceitos para o cálculo de duas variáveis, como aconteceu durante a exploração do domínio das funções de duas variáveis. Constatamos também que é importante a postura do professor para instigar os estudantes a pensarem sobre aquilo que já estudaram no cálculo de uma variável e para resgatar os conceitos correspondentes.

Aspectos dessa transição ficaram evidentes em diversos momentos, contribuindo para a produção de ideias matemáticas como as que destacamos a seguir:

- A determinação da fronteira da região do plano que é o domínio de uma função de duas variáveis pode ser obtida por meio da abordagem algébrica. Nesse caso, os estudantes estenderam o conhecimento referente ao estudo dos extremos dos intervalos reais correspondentes ao domínio de uma função de uma variável.
- As derivadas parciais representam taxas de variação da função considerando acréscimos nas direções do eixo x ou do eixo y, estendendo a ideia de que a derivada ordinária representa a taxa de variação da função de uma variável.
- As derivadas parciais de primeira ordem de uma função de duas variáveis representam o coeficiente angular da reta tangente à curva no espaço, estendendo a interpretação geométrica da derivada ordinária como coeficiente angular da reta tangente à curva no plano.
- Os extremos de uma função de duas variáveis podem ser caracterizados como pontos nos quais a função assume o maior (ou menor)

valor em comparação com pontos localizados em uma região plana próxima ao ponto extremo, estendendo a ideia correspondente da comparação de valores para pontos em intervalos que contêm o ponto extremo, no caso de uma variável.

Fizemos também uma análise sobre o papel das mídias na produção do conhecimento matemático, olhando especialmente para o *software* MAXIMA, usado em conjunto com outras mídias, como a oralidade e a escrita. Entendemos que as facilidades de obtenção das imagens, as possibilidades de movimentar essas imagens, as possibilidades de experimentar modificações de parâmetros, de usar os recursos algébricos e gráficos nas telas do MAXIMA, assim como as possibilidades de explorar conceitos transitando entre as mídias informáticas, oralidade e escrita contribuíram para a produção de ideias matemáticas acerca dos temas estudados. Cada mídia teve seu papel em determinado momento e, de algum modo, determinou a maneira como o conhecimento foi produzido. Para exemplificar, destacamos algumas situações:

- Na exploração do domínio das funções de duas variáveis, optamos por analisar as imagens da projeção do gráfico no plano *xy*. Para isso, os alunos movimentaram as imagens obtidas na tela do MAXIMA. As regiões visualizadas representavam o domínio. Essa visualização não poderia ser conseguida da mesma forma na mídia lápis-papel.
- A análise da imagem obtida pela projeção do gráfico no plano *xy* foi comparada com a análise das possibilidades de cálculo dos valores da função a partir de sua expressão algébrica, feita utilizando os recursos de cálculo do MAXIMA ou a mídia lápis-papel. Por meio dessa comparação (transitando entre a representação gráfica e algébrica, entre o visual e o calculado), as ideias matemáticas acerca do domínio da função de duas variáveis foram produzidas, acreditamos que de forma diferente da que seria possível apenas usando a mídia lápis-papel ou apenas as imagens produzidas por meio do *software*.
- A ideia de que há apenas um gráfico para cada função e que esse

gráfico não se altera ao modificarmos os intervalos das variáveis independentes foi produzida em um contexto em que os estudantes experimentaram muitas modificações nas variáveis x e y ao construir o gráfico da função usando o MAXIMA. As diferentes imagens apresentadas foram discutidas e os alunos concluíram que o que mudava era a visualização do gráfico e não o próprio gráfico. Com certeza essa experimentação não seria possível usando apenas a mídia lápis-papel.

• O conceito de curva de nível, como corte da superfície (gráfico da função) por planos do tipo z = *constante* foi produzido gerando as imagens dessas curvas por meio do MAXIMA. As curvas foram identificadas no gráfico e a manipulação das imagens possibilitou aos estudantes entender que cada curva corresponde a um determinado valor de z, que representa determinada altura no gráfico (palavras dos estudantes).

• As curvas de nível desenhadas na superfície (representação do espaço tridimensional) foram projetadas no plano $z = 0$ por meio da rotação da imagem, assim como foi feito com o domínio da função. As formas de visualizar as curvas de nível foram exploradas de diferentes maneiras usando os recursos do MAXIMA. Essa abordagem gráfica foi comparada com a determinação das curvas de nível a partir das equações obtidas igualando a expressão da função a valores constantes e de sua representação no plano, como se faz usualmente na mídia lápis-papel. Porém, os recursos do *software* possibilitaram essa comparação (como apresentamos nas figuras 21 e 23).

• A localização de extremos de funções de duas variáveis e a sua caracterização foram possíveis a partir da exploração de imagens dos gráficos das funções obtidas por meio do MAXIMA. No entanto, cuidou-se para que fossem apresentadas situações nas quais apenas a manipulação das imagens não fosse suficiente para determinar as coordenadas desses pontos. Nessas situações, o coletivo constituiu-se a partir da mídia informática e também da mídia lápis-papel, envolvendo representações gráficas e cálculos algébricos, que se complementaram para produção do conhecimento. Esse tipo de constituição do coletivo seres-humanos-com-mídias aconteceu em muitos momentos da pesquisa como, por exemplo, nas atividades de domínio.

Também observamos que algumas limitações da mídia escolhida para determinado contexto podem ser utilizadas em benefício da discussão mais ampla do assunto abordado, suscitando possibilidades diferentes de abordagem e de resolução dos problemas. Citamos, como exemplo, as conjecturas dos estudantes a respeito da delimitação da fronteira da região visualizada como domínio da função. A impossibilidade de obtê-la apenas visualmente através das imagens do MAXIMA levou os estudantes a buscarem outras maneiras de determiná-la, recorrendo aos processos análogos utilizados para funções de uma variável e aos recursos algébricos. Outro aspecto importante é que a exploração das atividades de forma mais livre pelos estudantes pôde levá-los não apenas a responder o que foi proposto pelo professor, como também a formular novos problemas. Citamos, como exemplo o questionamento dos estudantes sobre a quantidade de pontos extremos que uma função pode ter.

É interessante destacar que, em geral, as atividades desenvolvidas com o objetivo de propiciar a exploração de conceitos pelos estudantes com suporte na tecnologia necessitam de um tempo maior para a execução do que a apresentação dos conceitos de forma expositiva. Isso deve ser considerado no planejamento das atividades do curso.

Finalizamos apresentando também um material construído, tendo como base as atividades desenvolvidas nessa pesquisa, intitulado "Abordagem de conceitos de funções de duas variáveis com uso do software MAXIMA". Trata-se de um material que pode orientar aqueles que desejem desenvolver atividades com objetivos semelhantes às que desenvolvemos. Nesse produto educacional, descrevemos as atividades propostas nessa pesquisa e trouxemos comentários sobre o seu desenvolvimento e sugestões para o professor. O mesmo está disponível na página do Programa do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. *Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis*. 2011. (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

ARCAVI, A. *The role of visual representations in thelearningofmathematics*. Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/pdf/26.pdf.>. Acesso em: 25 de out. de 2013.

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. (Tese). São Paulo: USP, 1999.

BOGDAN, R. C; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação*. Trad. de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto – Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na educação matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. da V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática*: concepções & perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. cap. 16, p. 285-295.

________________. *Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de matemática*. Anais: I Simpósio de Psicologia da Educação Matemática. 2001.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

FLORES, C. R; WAGNER, D. R.; BURATO, I. C. F. *Pesquisa em visualização na educação matemática*: conceitos, tendências e perspectiva. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.14, n.1, p.31-45, 2012.

FRANCHI, R. H. O. L. *A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do cálculo Diferencial e Integral nos cursos de Engenharia*. 1993. 148 f. (Dissertação de Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1993.

FRANCHI, R. H. O. L. *Uma proposta curricular de matemática para cursos de engenharia utilizando modelagem matemática e informática*. 2002. 189 f. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

FROTA, M. C. R. Ambientes que favorecem a visualização e a comunicação em cálculo. In: FROTA, M. C. R.; BIANCHINI, B. L.; CARVALHO, A. M. F T. *Marcas da educação matemática no ensino superior*. São Paulo: Papirus, 2013. cap. 3, pp. 61-88.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados*. In: IV Congresso RIBIE, Brasília 1998.

GIRALDO, V. *Descrições e conflitos computacionais*: o caso da derivada. (Tese de Doutorado em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação). Universidade Federal do Rio de Janeiro - COOPE, Rio de Janeiro, 2004.

GUZMÁN, M. *The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis*. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at Undergraduate Level, 2., 2002, Hersonissos. Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level.Hersonissos: UniversityofCrete, 2002. p. 1-24. Disponível em: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf.>. Acesso em: 21 de out. de 2013.

IMAFUKU, R. S. *Sobre a passagem do estudo de uma variável real para o caso de duas variáveis*. (Dissertação de mestrado). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008, 235 p.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: FROTA, M. C. R.; NASSEER, L. (orgs). *Educação Matemática no Ensino Superior*: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. p. 11-36.

KAWASAKI, T. F. *Tecnologias na Sala de Aula de matemática*: resistência e mudanças na formação continuada de professores. (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência*: o futuro do pensamento na era da informática. Trad. de Carlos Irineu da Costa. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993. 203 p.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, R. M. *A visualização na resolução de problemas de cálculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP*. (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Estadual de Campinas, 2008.

MARTINI, A. H. *O software MAXIMA aplicado ao cálculo diferencial*. (Dissertação de Mestrado em Matemática Universitária) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

MINAYO, M. C. S. O desafio da pesquisa social. In: MINAYO, M. C. S.; DESLANDES, S. F.; GOMES, R. *Pesquisa social*: teoria, método e criatividade. 31 ed. Petrópolis: Editora Vozes, 2012. cap. 1, pp. 9-29.

MIRANDA, A. M. *As tecnologias da informação no estudo do cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa.* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

MORAN, J. M.. Ensino e aprendizagem inovadores com apoio de tecnologias. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T. BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica.* 21. ed. Campinas: Papirus, 2013. cap. 1, pp. 11-72.

OLIMPIO JUNIOR, A. *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática – Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática.* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.
PRESMEG, N. C. *Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology*. Disponível em: <http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/ pmeVisualizationFinalAPA.pdf.>. Acesso em: 23 de out. de 2013.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de cálculo e análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSEER, L. (orgs). *Educação Matemática no Ensino Superior*: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. p. 81-97.

REZENDE, W. M. *O ensino de cálculo*: dificuldades de natureza epistemológica. (Tese de Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SANTOS FILHO, J. C. *Pesquisa educacional*: quantidade – qualidade / José Camilo dos Santos Filho; Silvio Sánches Gamboa (org.). São Paulo, Cortez (2009). (Coleção Questões da Nossa Época; v. 42).

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. Trad. de Jonei Cerqueira Barbosa. *Bolema*, Rio Claro, SP, ano 13, n. 14, pp. 66-91, 2000.

STEWART, James. *Cálculo*. Cenearging Learning. 2010.

THOMAS, G. B. *Cálculo*. Pearson Education do Brasil. 2005.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH J. V. (Ed). *The concept of activity in soviet psychology*. New York: M. E.Sharpe, 1981. pp. 256-278.

VILLARREAL, M. *O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas*. 1999. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Cronograma das atividades realizadas na disciplina

AULAS	**DATA**	**TEMA**	**AMBIENTE**
1 e 2	04-02-2013	Apresentação da disciplina, abordagem de temas de interesse dos estudantes.	Sala de Aula
3 e 4	06-02-2013	Apresentação da pesquisa, do projeto de pesquisa e assinatura dos termos de autorização para a participação na pesquisa.	Sala de Aula
5 e 6	18-02-2013	Primeira atividade: gráfico de uma função de duas variáveis e seu domínio.	Laboratório de Informática
7 e 8	20-02-2013	Primeira atividade: gráfico de uma função de duas variáveis e seu domínio.	Laboratório de Informática
9 e 10	25-02-2013	Discussão do desenvolvimento da primeira atividade.	Sala de Aula
11 e 12	27-02-2013	Segunda atividade: curvas de nível de uma função de duas variáveis.	Laboratório de Informática
13 e 14	04-03-2013	Discussão do desenvolvimento da atividade da aula anterior.	Sala de Aula
15 e 16	06-03-2013	Segunda atividade: curvas de nível de uma função de duas variáveis.	Laboratório de Informática
17 e 18	11-03-2013	Segunda atividade: curvas de nível de uma função de duas variáveis.	Laboratório de Informática

19 e 20	13-03-2013	Discussão do desenvolvimento da atividade da aula anterior.	Sala de Aula
21 e 22	18-03-2013	Discussão do desenvolvimento da atividade da aula anterior.	Sala de Aula
23 e 24	20-03-2013	Primeira avaliação.	Sala de Aula
25 e 26	25-03-2013	Discussão da avaliação e aplicação do questionário.	Sala de Aula
27 e 28	01-04-2013	Derivadas parciais.	Sala de Aula
29 e 30	03-04-2013	Derivadas parciais.	Sala de Aula
31 e 32	08-04-2013	Terceira atividade: derivadas parciais de primeira ordem.	Laboratório de Informática
33 e 34	10-04-2013	Quarta atividade: interpretação geométrica das derivadas parciais de uma função de duas variáveis.	Laboratório de Informática
35 e 36	15-04-2013	Discussão do desenvolvimento da atividade da aula anterior.	Sala de Aula
37 e 38	17-04-2013	Regra da cadeia para funções de mais de uma variável.	Sala de Aula
39 e 40	22/04/2013	Diferenciação implícita.	Sala de Aula

41 e 42	24-04-2013	Segunda avaliação.	Sala de Aula
43 e 44	29-04-2013	Funções com valores vetoriais.	Sala de Aula
45 e 46	06-05-2013	Funções com valores vetoriais.	Sala de Aula
47 e 48	08-05-2013	Vetores tangentes e vetores normais.	Sala de Aula
49e50	13-05-2013	Comprimento de arco e curvatura.	Sala de Aula
51 e 52	15-05-2013	Derivadas direcionais e vetor gradiente.	Sala de Aula
53 e 54	20-05-2013	Derivadas direcionais e vetor gradiente.	Sala de Aula
55 e 56	22-05-2013	Atividades relacionadas às aulas anteriores.	Sala de Aula
57 e 58	27-05-2013	Quinta atividade: extremos de uma função de duas variáveis.	Sala de Aula (com uso dos *notebooks* dos estudantes)
59 e 60	29-05-2013	Discussão do desenvolvimento da atividade da aula anterior.	Sala de Aula
61 e 62	03-06-2013	Quinta atividade: extremos de uma função de duas variáveis.	Sala de Aula (com uso dos *notebooks* dos estudantes)
63 e 64	05-06-2013	Quinta atividade: extremos de uma função de duas variáveis	Sala de Aula (com uso dos *notebooks* dos estudantes)

65 e 66	10-06-2013	Discussão do desenvolvimento das atividades das aulas anteriores.	Sala de Aula
67 e 68	12-06-2013	Aplicação do questionário e finalização das atividades da pesquisa.	Sala de Aula
69 e 70	17-06-2013	Integração múltipla.	Sala de Aula
71 e 72	19-06-2013	Integração múltipla.	Sala de Aula
73 e 74	24-06-2013	Integração múltipla.	Sala de Aula
75 e 76	26-06-2013	Integração múltipla.	Sala de Aula
77 e 78	01-07-2013	Integração múltipla.	Sala de Aula
79 e 80	03-07-2013	Avaliação final.	Sala de Aula

APÊNDICE B - Questionário aplicado aos alunos após a primeira avaliação

1. Escreva, em linhas gerais, o que você achou da última avaliação de Cálculo: nível de dificuldade e no que ela difere (ou se assemelha) a outras avaliações de Cálculo já realizadas por você.

2. Você considera que houve aprendizagem dos conceitos matemáticos que foram inseridos nessa avaliação? A que você atribui isso? Explique.

APÊNDICE C - Questionário aplicado aos alunos após o término das atividades

1. Em nossas aulas, abordamos os conceitos de funções de duas variáveis fazendo o uso de tecnologias. O que você achou desse tipo de atividade? Explique.

2. Em sua opinião, no que esse tipo de atividade difere de outras que você já teve em aulas de Matemática? Explique.

3. Utilizamos o *software* MAXIMA para explorar os conceitos. Quais os pontos positivos e os negativos dessa utilização? E quanto aos recursos do *software*?

4. Fizemos atividades com o MAXIMA no laboratório e em Sala de Aula com os *notebooks*. Compare esses dois momentos.

5. Em muitos momentos os conteúdos foram sistematizados e trabalhados de modo teórico em Sala de Aula. A exploração feita anteriormente do *software* contribuiu para o entendimento desses conteúdos? Por quê?

6. O que você tem a dizer sobre a interação entre os alunos e o professor nos ambientes citados?

7. Você considera que aprendeu os conteúdos abordados? A que você atribui isso?

8. Em sua opinião, os ambientes constituídos com a utilização de tecnologia podem propiciar a construção do conhecimento de cálculo? Justifique.

APÊNDICE D – O primeiro grupo de atividades

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS E SEU DOMÍNIO

OBJETIVOS:

- Apresentar novamente o *software* MAXIMA e os comandos e funções que serão utilizados na atividade.
- Proporcionar condições ao aluno para compreender a definição de funções de duas variáveis, através de uma atividade exploratória com o auxílio do computador, em que o aluno terá a oportunidade de plotar e visualizar, de "diferentes ângulos" e intervalos, o gráfico de uma função de duas variáveis. Dessa maneira, identificando as funções representadas algebricamente por uma expressão algébrica com seus respectivos gráficos que são representados por superfícies no R^3.
- Compreender, identificar e descrever o domínio de uma função de duas variáveis, relacionando-o com uma região do plano *xy* que pode ser uma região limitada ou uma região não limitada.

1) Defina, no MAXIMA, a função $f(x,y) = x^2 + y^2$. Você pode fazer isso digitando na linha de comando f(x,y):=x^2+y^2;Shift+Enter.

a) Esboce o gráfico da função $f(x,y)$ nos intervalos $-2 \leq x \leq 2$ e $-2 \leq y \leq 2$, utilizando na barra de menu as opções: **Gráfico → Gráfico 3d...**, no campo **Expressão**, digite f(x,y), **variável x de** -2 **para** 2, **variável y de** -2 **para** 2 e no **Formato** selecione **gnuplot**.

b) Com o cursor sobre a janela do gráfico, mantenha pressionado o botão esquerdo do *mouse*. Movimente o gráfico em diferentes direções.

c) Salve o gráfico que, em sua opinião, apresentou melhor visualização. Para isso, na janela **gnuplotgraph** em que está o seu gráfico, selecione .

d) Utilizando na barra de menu as opções: **Gráfico → Gráfico 3d...** esboce novamente o gráfico da função $f(x,y)$ alterando os intervalos de variação de *x* e de *y*.

2) Defina, no MAXIMA, a função $g(x,y)=\cos\left(\frac{x^2+y^2}{100}\right)$. Você pode fazer isso digitando na linha de comando **g(x,y):=_ós((x^2+y^2)/100)**; Shift+Enter. Para saber como as diferentes constantes e funções devem ser digitadas, você pode recorrer à Ajuda do MAXIMA.

a) Utilizando a barra de menu as opções: **Gráfico → Gráfico 3d...**, plote diversos gráficos da função $g(x,y)$ alterando apenas os intervalos de *x* e *y:*

I. $-5 \leq x \leq 5$ e $-5 \leq y \leq 5$;

II. $-10 \leq x \leq 10$ e $-10 \leq y \leq 10$;

III. $-20 \leq x \leq 20$ e $-20 \leq y \leq 20$;

IV. $-30 \leq x \leq 30$ e $-30 \leq y \leq 30$.

b) Observe os gráficos esboçados da $g(x,y)$ em diferentes intervalos de *x* e de *y*. Você observa alguma modificação na aparência da superfície obtida? Existe mais de um gráfico para a mesma função $g(x,y)$? Explique.

c) É possível esboçar o gráfico da função $g(x,y)$ para quaisquer valores de *x* e de *y*?

d) Chamamos de domínio de uma função ao conjunto de valores das variáveis independentes para os quais a função está definida. No caso das funções de duas variáveis *x* e *y*, o domínio é um conjunto de pares ordenados $(x,y)\in\Re^2$, para os quais é possível obter o valor da função. No caso da função $g(x,y)$, qual é o domínio?

3) Defina, no MAXIMA, a função $h(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

a) Esboce gráficos da função $h(x,y)$ usando opções diferentes para as variações de *x* e de *y*. O que acontece quando usamos intervalos de variação maiores?

b) Encontre os valores de $h(2,2)$, $h(-1,2)$, $h(4,0)$ e $h(3,3)$. É possível obter os valores da função nos pontos acima indicados? Por quê?

c) Movimente o gráfico da função de modo a visualizar a região para a qual não é possível calcular $h(x,y)$. Para melhor determinação da região, ao esboçar o gráfico, aumente os valores da Grade.

d) Que região do plano *xy* corresponde ao domínio da função $h(x,y)$? Faça um esboço do domínio da função $h(x,y)$.

4) Explore as funções indicadas abaixo. Procure uma boa visualização do gráfico, movimente o gráfico de modo a visualizar também o domínio, determine o domínio.

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$

b) $f(x,y)=\dfrac{1}{y-x}$

c) $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$

d) $f(x,y)=\log(y+x^2)$

e) $f(x,y)=x.e^{(-x^2-y^2)}$

f) $f(x,y)=x.sen\left(\dfrac{y}{x}\right)+y.(2.x)$

APÊNDICE E – O segundo grupo de atividades

CURVAS DE NÍVEL DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

OBJETIVOS:

- Proporcionar ao aluno condições de identificar, descrever, construir e compreender as curvas de nível de uma função de duas variáveis.
- Relacionar o gráfico de uma superfície obtido a partir de função de duas variáveis com as suas respectivas curvas de nível.

Com essa atividade, temos o objetivo de explorar um importante conceito relativo a funções de duas variáveis, que é o conceito de curva de nível.

Uma curva de nível ou curva de contorno de uma função *f* de duas variáveis é o conjunto de todos os pontos do domínio de *f* nos quais o valor de *f* é igual a **c**, onde **c** é uma constante. As curvas de nível $f(x, y) = c$ são cortes (traços) do gráfico de *f* no plano horizontal z = c projetados sobre o plano xy (plano $z = 0$).

Vamos utilizar alguns dos recursos gráficos do *software* MAXIMA para explorar esse conceito.

Parte 1

Considere a função $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Sabemos que o gráfico de $f(x, y)$ é uma superfície em R^3. Vamos utilizar o MAXIMA para visualizar o gráfico de $f(x, y)$ e os cortes na superfície de *f* por planos z = c. Salve todas as imagens possíveis e escreva, em um arquivo *Word,* suas observações e conclusões relativas às etapas indicadas abaixo, inserindo as imagens correspondentes.

Para isso, sugerimos:

a) Defina, no MAXIMA, a função *f*.

b) Esboce o gráfico de *f*.

c) A sequência de comandos a seguir possibilita traçar na superfície de $f(x, y)$ as curvas obtidas pelo corte por planos z = c. Execute e observe as curvas identificadas na superfície.

```
grafico:"set pm3d at s; unset surface; set contour surface;\

set cntrparam levels 30; unset key"$

plot3d(f(x,y),[x,-3,3],[y,-3,3],[grid,50,50],[gnuplot_pm3d,true],

[gnuplot_preamble,grafico])$
```

d) Como definido no início, uma curva de nível é uma projeção do corte (traço) do gráfico de f no plano xy (z = 0). Movimente o gráfico de $f(x, y)$ de modo a visualizar o que seriam essas curvas projetadas no plano z = 0.

e) Existe um comando do MAXIMA o qual traça as curvas de nível de uma determinada função f: é o comando **contour_plot**. Faça isso para a função f em estudo, digitando **contour_plot(f(x,y),[x, -3,3],[y,-3,3]**);Shift+Enter

f) Compare as imagens obtidas na visualização pedida no item **d** com as curvas do item **e**. O que você observa?

g) Com os recursos do MAXIMA, é possível obter a imagem do gráfico de $f(x, y)$, dos cortes da superfície por planos z = c e das respectivas projeções. Experimente isso para a função $f(x, y)$.

```
grafico:"set pm3d at s; unset surface; set contour both;\

set cntrparam levels 30; unset key"$

plot3d(f(x,y),[x,-3,3],[y,-3,3],[grid,50,50],[gnuplot_pm3d,true],

```

h) Escreva as expressões das curvas de nível obtidas a partir da função $f(x, y)$ para valores de z = 0, z = 1, z = 2 e z = 3. Que tipo de curvas são essas? Esboce os gráficos.

i) Você acha que as curvas de nível dão algum tipo de informação sobre o gráfico da função? É possível imaginar o gráfico de uma função conhecendo os traçados das curvas de nível e os respectivos valores de z? Explique.

Parte 2

Explore livremente as funções abaixo, procurando sempre estabelecer uma relação entre o gráfico, os cortes e as curvas de nível de cada uma das funções. Monte arquivos com as imagens e as observações feitas.

a) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

c) $f(x, y) = x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$

d) $f(x, y) = \dfrac{-5x}{x^2 + y^2 + 1}$

Parte 3

As imagens abaixo são representações das curvas de nível das funções indicadas nos itens de A a F. Com base nas curvas de nível, procure visualizar os gráficos das funções e tente associar as curvas de nível às funções correspondentes. Explique por que você fez essa associação. Esboce os gráficos com auxílio do MAXIMA e verifique suas conjecturas.

(A) $z = \cos y$

(B) $z = sen\sqrt{x^2 + y^2}$

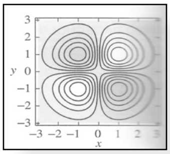
(C) $z = \cos(xy)$

(D) $z = e^x sen\, y$

(E) $z = xye^{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$

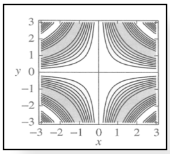
(F) $z = |xy|$

( )



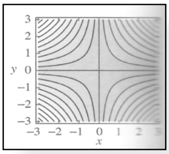
3
2
1
y 0
−1
−2
−3
−3 −2 −1 0 1 2 3
x

( )



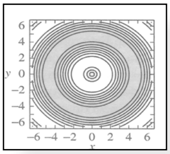
3
2
1
y 0
−1
−2
−3
−3 −2 −1 0 1 2 3
x

( )



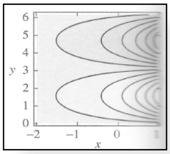
3
2
1
y 0
−1
−2
−3
−3 −2 −1 0 1 2 3
x

( )



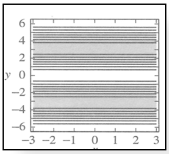
6
4
2
y 0
−2
−4
−6
−6 −4 −2 0 2 4 6
x

( )



6
5
4
y 3
2
1
0
−2 −1 0
x

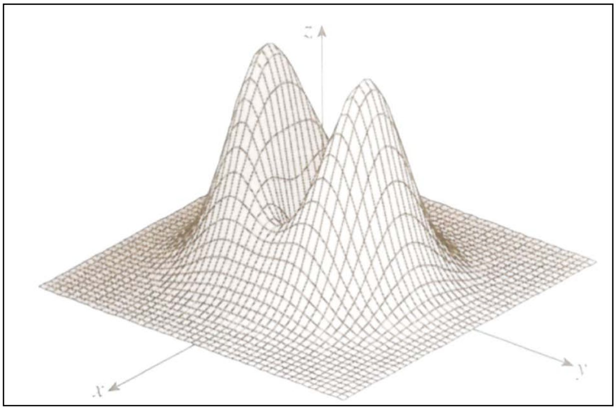
( )



6
4
2
y 0
−2
−4
−6
−3 −2 −1 0 1 2 3

Parte 4

a) Desenhe, na superfície mostrada abaixo, curvas resultantes dos cortes no gráfico de *f* por planos $z = c$.



b) Faça um esboço das curvas de nível da função anterior no plano *xy*.

c) Dentre as muitas aplicações das curvas de nível, elas aparecem nos mapas de clima, nas quais as curvas de nível representam pontos de mesma temperatura. Nesse caso, as curvas de nível são chamadas de isotérmicas. A temperatura T (em graus Celsius) em cada ponto (x,y) de uma placa de aço de 10 metros de raio é $T(x,y) = 600 - 0,75x^2 - 0,75y^2$, onde x e y são medidos em metros.

I. Esboce algumas das curvas isotérmicas.
II. Encontre uma curva isotérmica para a temperatura de 300º.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

Com esta atividade, temos o objetivo de explorar graficamente o conceito das derivadas parciais de uma função de duas variáveis.

Para esse propósito, vamos utilizar alguns dos recursos gráficos do *software* MAXIMA para explorar esse conceito.

Uma questão que frequentemente se apresenta nas aplicações de funções de várias variáveis é "Como o valor da função será afetado por variações em uma das variáveis independentes?" Podemos respondê-la considerando as variáveis independentes uma de cada vez. Dessa forma, a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a *x* em (x_0, y_0) é obtida derivando a variável *x* mantendo-se *y* fixo. Analogamente, a derivada parcial de $f(x,y)$ em relação a *y* em (x_0, y_0) é obtida derivando a variável *y* mantendo-se *x* fixo.

Como você já sabe, podemos utilizar as seguintes notações para as variáveis parciais:

$$f_x(x,y) \ \ ou \ \ \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_y(x,y) \ \ ou \ \ \frac{\partial f}{\partial y}$$

O que representa o valor numérico de cada derivada parcial aplicada em determinado ponto?

Parte 1

Vamos analisar o caso da derivada parcial de $f(x,y) = 8 - x^2 - 2y^2$ em relação à variável *x*. Vamos escolher o ponto inicial P(1,2).

- Nas derivadas parciais, consideramos uma das variáveis como constante. No caso de $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)}$, qual variável deve ser considerada constante e qual deve ser o valor dessa constante?

- Quando fazemos y = constante, temos um plano paralelo ao plano xz. Esse plano tem interseção com a superfície do gráfico de $f(x,y)$. Podemos visualizar essa situação com o auxílio do MAXIMA, para isso, inserimos as seguintes linhas de comandos:

```
(%i13) load(draw);
(%o13)
C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.0-2/share/maxima/5.28.0-2/share/draw/draw.lis
```

```
-->  draw3d(color=green,
     parametric_surface(u,v,8-u^2-2*v^2,u,-2,2,v,-2,4),
     color=blue,
     parametric_surface(u,2,v,u,-2,2,v,-25,8),
     surface_hide=true,
     xtics=1,ytics=1);
```

Plota o gráfico de $f(x,y)$

Plota o gráfico do plano $y = 2$

Define a escala dos eixos x e y

Você consegue visualizar a interseção do gráfico de $f(x,y)$ e do plano y = 2? O que é essa interseção? Faça a rotação desse gráfico.

- Para relacionar a derivada parcial de $f(x,y)=8-x^2-2y^2$ em relação à x no ponto (1,2), vamos manter y constante em 2. Assim temos que $f(x,2)=-x^2$. Agora vamos plotar essa curva no plano com o auxílio do MAXIMA. Compare a representação dessa curva no plano com o gráfico que mostra a interseção de $f(x,y)$ com o plano y = 2. Faça a rotação de modo a visualizar essa curva na mesma posição que aparece na representação plana.

Parte 2

Vamos agora interpretar o valor numérico das derivadas parciais.

No caso das funções de uma variável, a derivada aplicada em um ponto representa o coeficiente angular da reta tangente à curva naquele ponto.

• Para a curva $y = -x^2$, calcule $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$, determine a reta tangente à curva no ponto $x = 1$ e esboce o gráfico no mesmo sistema de eixos que a curva.

• Vamos agora construir o gráfico da reta tangente à superfície $f(x, y)$, para isso digite as seguintes linhas de comando:

```
(%i25) draw3d(color=green,
       parametric_surface(u,v,8-u^2-2*v^2,u,-2,2,v,-2,4),
       color=blue,
       parametric_surface(u,2,v,u,-2,2,v,-25,8),
       color=red,
       parametric(t,2,1-2*t, t,-4,4),
       color=black,
       parametric(t,2,-t^2, t,-2,2),
       surface_hide=true,
       xtics=1,ytics=1);
```

Para comparar com o que fizemos, no plano e no espaço, vamos deletar os comandos iniciais digitados anteriormente, ficando apenas:

```
(%i29) draw3d(
       color=red,
       parametric(t,2,1-2*t, t,-4,4),
       color=black,
       parametric(t,2,-t^2, t,-4,4),
       surface_hide=true,
```

Plota o gráfico da reta tangente a *f(x,y)*

Plota o gráfico da curva

EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

Parte 1

a) Construa, no MAXIMA, o gráfico da função $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$.

b) Modifique os intervalos de variação de x e y. Faça a rotação em diferentes direções e procure identificar se a função tem extremos relativos (máximos ou mínimos). Registre suas observações:

É possível para você estimar as coordenadas dos pontos que você indicou no item anterior? Em caso afirmativo, quais são essas coordenadas? Caso não seja possível, por quê?

Faça o mesmo para a função $g(x,y) = -x^2 + 2x - y^2 + 4y - 3$ e registre as suas observações.

- A função $f(x,y)$ tem um *máximo local* no ponto P_0 se $f(P_0) \geq f(P)$ para todos os pontos P próximos a P_0.
- A função $f(x,y)$ tem um *mínimo local* no ponto P_0 se $f(P_0) \leq f(P)$ para todos os pontos P próximos a P_0.

c) Com o auxílio do MAXIMA, calcule valores da função $f(x,y)$ nos extremos relativos estimados e em pontos das vizinhanças desses extremos. Compare os valores.

d) Faça o mesmo com a função $g(x, y)$.

Parte 2

Nos extremos locais de funções de duas variáveis, as derivadas parciais têm características especiais.

Para elaborarmos conjecturas a respeito das derivadas parciais nos extremos relativos de funções de duas variáveis, vamos retomar os conceitos trabalhados na atividade 4 na qual interpretamos o significado geométrico das derivadas parciais.

Discuta com seu grupo o que representa o valor numérico da derivada parcial de uma função de duas variáveis aplicada em determinado ponto. Escreva o que concluíram.

Se P é um ponto máximo local de $f(x, y)$, que valor você acha que deve ter $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P$? E a $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P$? Justifique suas respostas.

Parte 3

Se uma função $f(x, y)$ tem um máximo ou mínimo locais em $P(a,b)$ e as derivadas parciais de primeira ordem de $f(x, y)$ existem nesses pontos, então $f_x(a,b)=0$ e $f_y(a,b)=0$. Nesse caso, o ponto $P(a,b)$ é chamado ponto crítico. Mas como no cálculo a uma variável, nem todos os pontos críticos correspondem a um máximo ou mínimo. Em um ponto crítico, a função pode ter um máximo local ou um mínimo local ou nenhum deles.

Então, para determinar os pontos críticos de uma função de duas variáveis, devemos examinar as derivadas parciais de $f(x, y)$. Se elas estão definidas qualquer x e qualquer y, encontraremos os pontos críticos, igualando-as a zero e resolvendo o sistema correspondente.

Isso com pode ser feito também usando os recursos de cálculo do

MAXIMA com os comandos **diff** (para cálculo das derivadas parciais) e **solve** (para a resolução do sistema de equações).

Vamos retomar as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ estudadas e determinar os pontos críticos. Veja se eles coincidem com os valores estimados anteriormente por você.

Considere a função $h(x, y) = x^2 - y^2$. Essa função tem um ponto crítico. Determine esse ponto crítico.

Esboce o gráfico de $h(x, y)$ e observe as características da função no ponto crítico. Para isso, faça a rotação da função procurando observar o gráfico em diferentes direções. Esse ponto é de máximo? É de mínimo? Explique.

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Parte 4

No caso de funções de duas variáveis, nem sempre os pontos críticos são pontos de máximo ou mínimo relativos. Alguns pontos críticos correspondem ao que chamamos de ponto de sela, não são nem máximos e nem mínimos. É o que acontece com o ponto crítico da função $h(x, y) = x^2 - y^2$.

Uma forma de classificar os pontos críticos de uma função de duas variáveis é o chamado teste das derivadas parciais de segunda ordem.

Suponha que as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x, y)$ sejam contínuas e que $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$.

Considere $D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$:

Se $D > 0$ e $f_{xx}(a,b) > 0$, então $f(a,b)$ é um máximo local.

Se $D > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0$, então $f(a,b)$ é um mínimo local.

Se $D < 0$, então $f(a,b)$ não é mínimo local nem máximo local.

Se $D = 0$, o teste é inconclusivo.

Retome as funções $f(x,y)$, $g(x,y)$ e $h(x,y)$ e aplique o teste nos pontos estudados.

Parte 5

Construa o gráfico das seguintes funções, explore, calcule e analise os seus pontos críticos.

I) $f(x,y) = x - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}$

II) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

SOBRE O AUTOR

Fabio Luiz de Oliveira possui graduação em Matemática pelo Instituto Superior de Ciências Artes e Humanidades de Lavras (1997), especialização em Matemática e Estatística pela Universidade Federal de Lavras (1999) e mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal de Ouro Preto (2014). Atualmente é professor da Faculdade Presidente Antônio Carlos de Conselheiro Lafaiete e professor da educação básica da rede estadual de Minas Gerais. Tem experiência na área de Matemática no ensino fundamental, médio e superior, tendo como áreas de interesse: Educação Matemática, utilização das tecnologias digitais na Educação Matemática, ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

"Este livro foi desenvolvido com as fontes *Berkeley Oldstyle*
e *Pill Gothic*, conforme Projeto Gráfico aprovado pela
Diretoria da Editora UFOP em 2014."

editoraUFOP

9 788528 803587